سلسلة

كنزي

في

الهندسة

الفصل الدراسي الثاني

إعداد الأستاذ

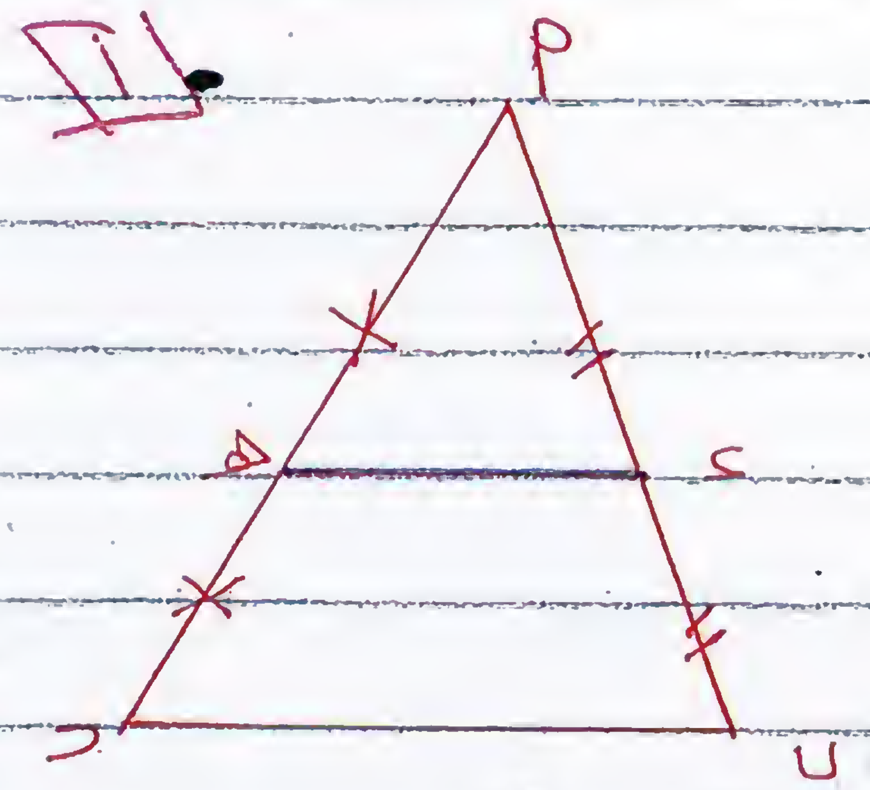
أحمد عمر

معلم أول رياضيات

01023636682

3

متطلبات قبلية

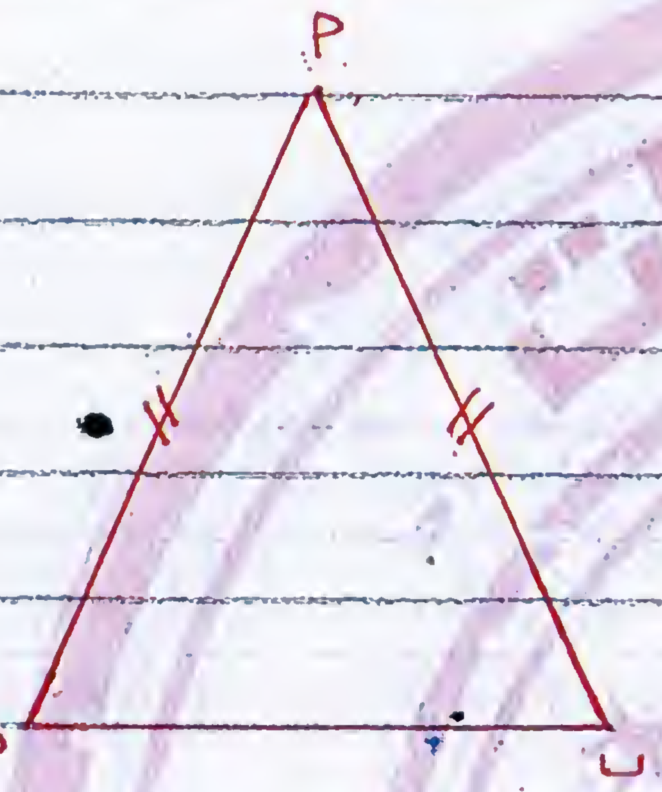


في △ أ ب جـ

اذا كان ء منتصف أب ، هـ منتصف أجـ

فان:

ءهـ // ب جـ ، ءهـ = ½ ب جـ

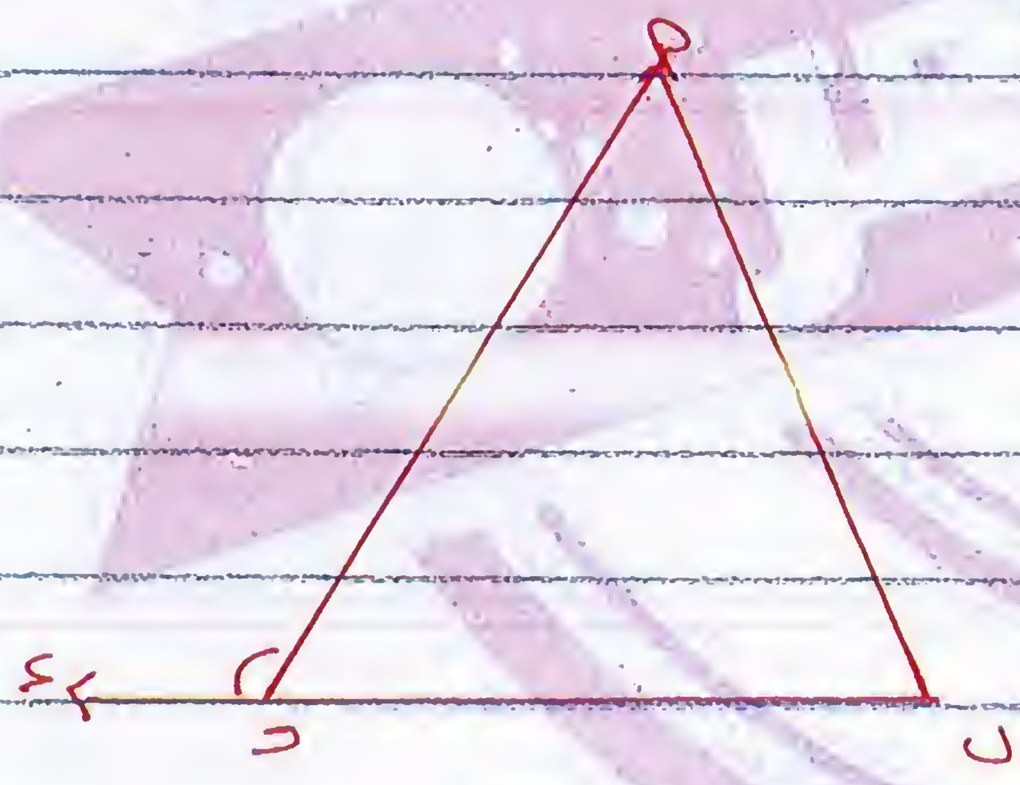


في △ أ ب جـ

اذا كان: أب = أجـ

فان ق(∠ب) = ق(∠جـ)

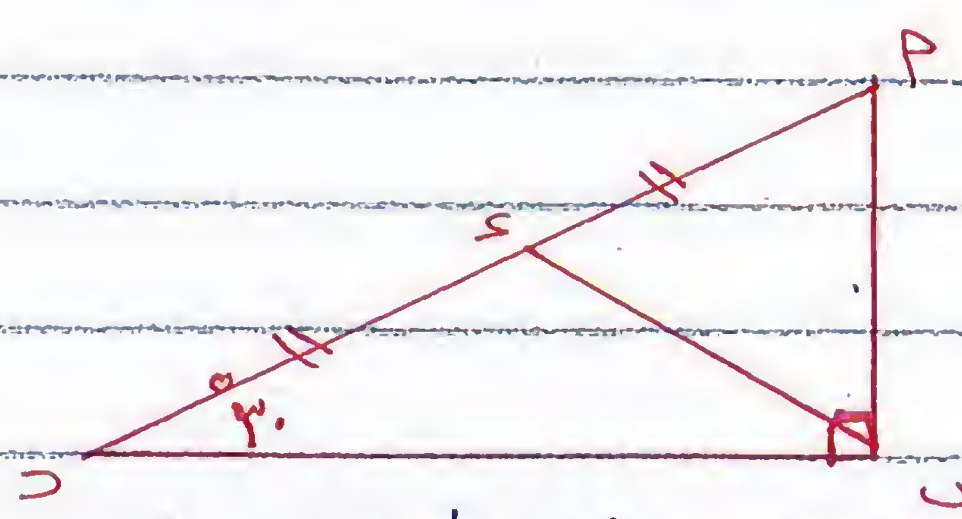
" زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان "



إذا كانت ء ∈ ب جـ فإن

ق(∠أجـء) = ق(∠أ) + ق(∠ب)

" قياس الزاوية الخارجة عن المثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين ماعدا المجاورة لها "



في △ أ ب جـ

اذا كانت ء منتصف أجـ ، ق(∠ب) = ٩٠°

فان ب ء = ½ أجـ

، أ ب = ½ أجـ " مقابل للزاوية ٣٠° "

طول المتوسط الخارج من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر

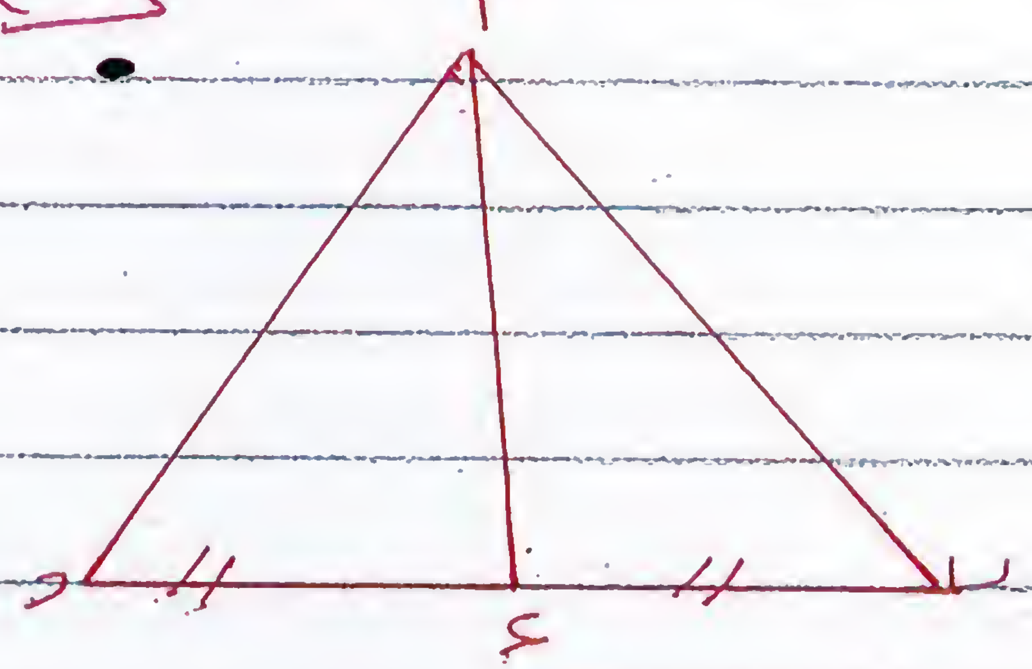
، طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر

(٢)

في △ أ ب جـ

إذا كان $\overline{أء}$ متوسط، أ ء = $\frac{1}{2}$ ب جـ

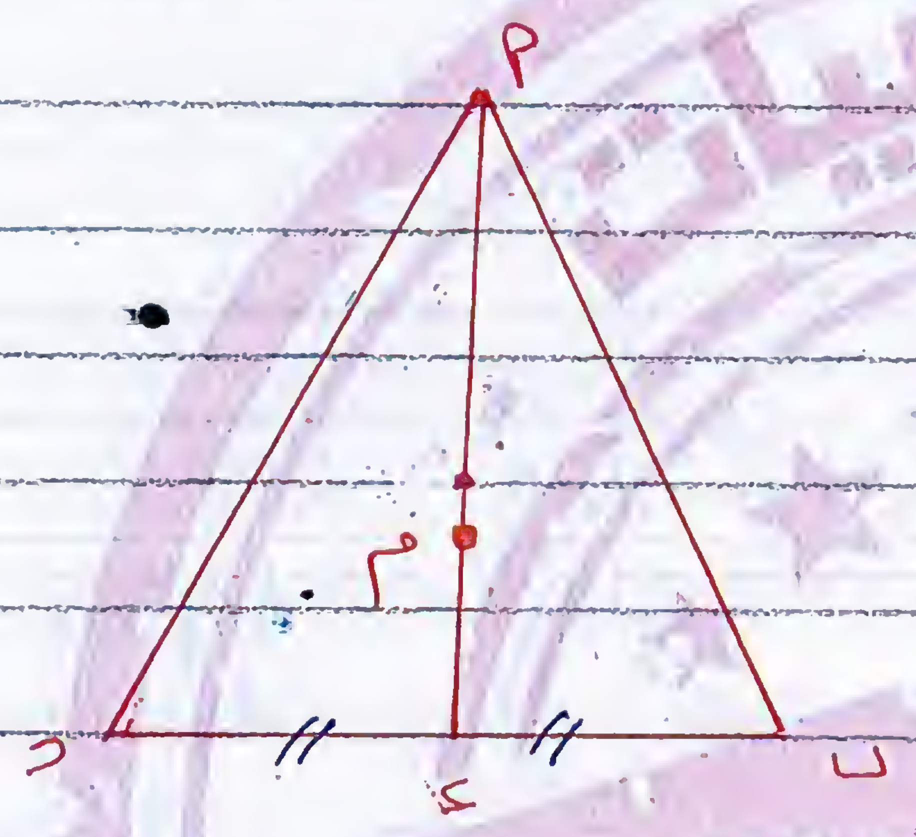
فإن: ق($\hat{أ}$) = $90°$



إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث

فإن:

م ء = $\frac{1}{2}$ أ م ، م ء = $\frac{1}{3}$ أ ء



(نظرية إقليدس)

في △ أ ب جـ القائم في أ

إذا كان $\overline{أء} \perp \overline{بجـ}$

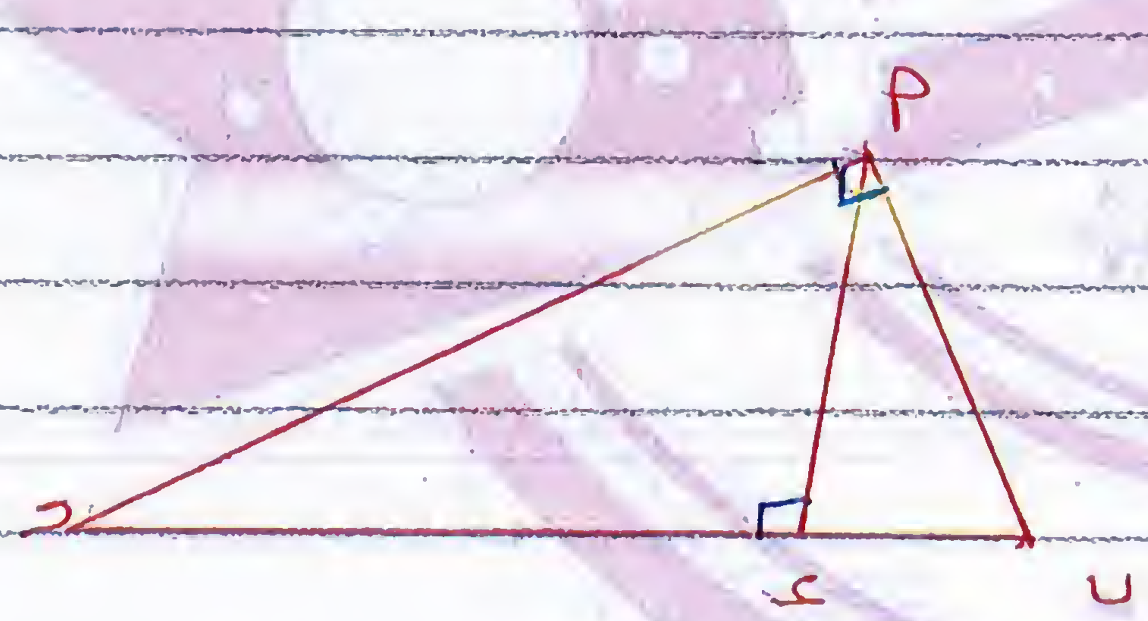
فإن:

$(أب)^2$ = ب ء × ب جـ

$(أجـ)^2$ = جـ ء × جـ ب

$(أء)^2$ = ء ب × ء جـ

أ ء = $\frac{أب \times أجـ}{بجـ}$

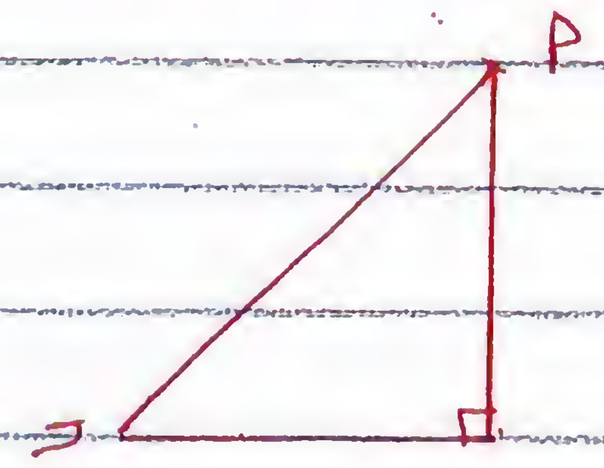


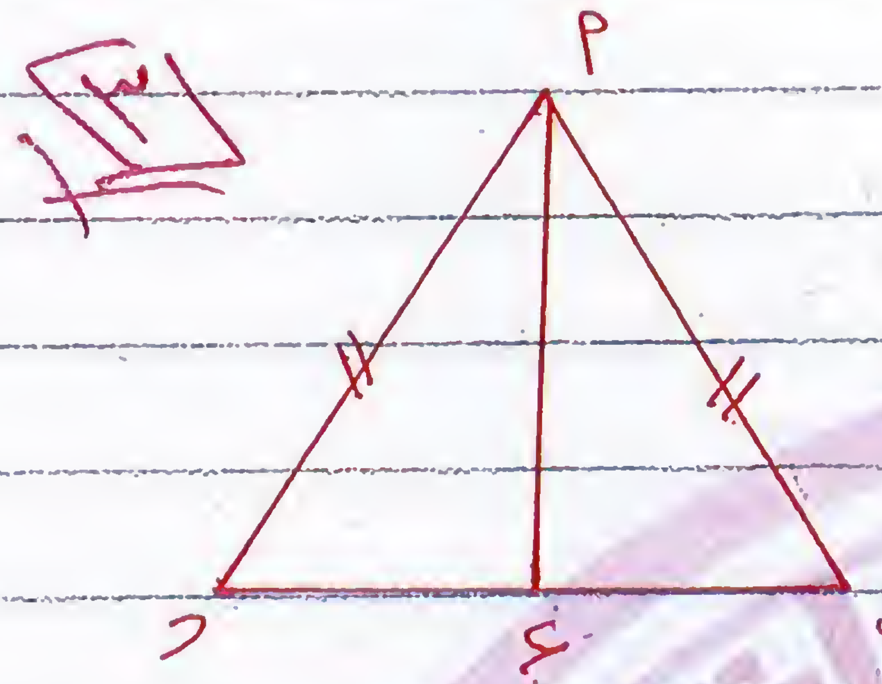
نظرية فيثاغورث

إذا كان △ أ ب جـ قائم في ب

فإن:

$(أجـ)^2 = (أب)^2 + (بجـ)^2$





نتائج على المثلث المتساوي الساقين

في Δ أ ب ج إذا كان
أ ب = أ ج ،

١- اذا كان $\overline{\text{أء}}$ متوسط فإن
$\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب ج}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ

٢- اذا كان $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب ج}}$ فإن $\overline{\text{أء}}$ متوسط ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف زاوية ∠ أ

٣- اذا كان $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ فإن $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب ج}}$ ، $\overline{\text{أء}}$ متوسط

الدائرة

هي مجموعة النقط التي تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة
النقطة الثابتة هي مركز الدائرة
البعد الثابت هو نصف قطر الدائرة

نصف قطر الدائرة:
هي القطعة المستقيمة التي تصل بين مركز الدائرة واي نقطة على الدائرة

وتر الدائرة: هي القطعة المستقيمة التي تصل بين اي نقطتين على الدائرة.

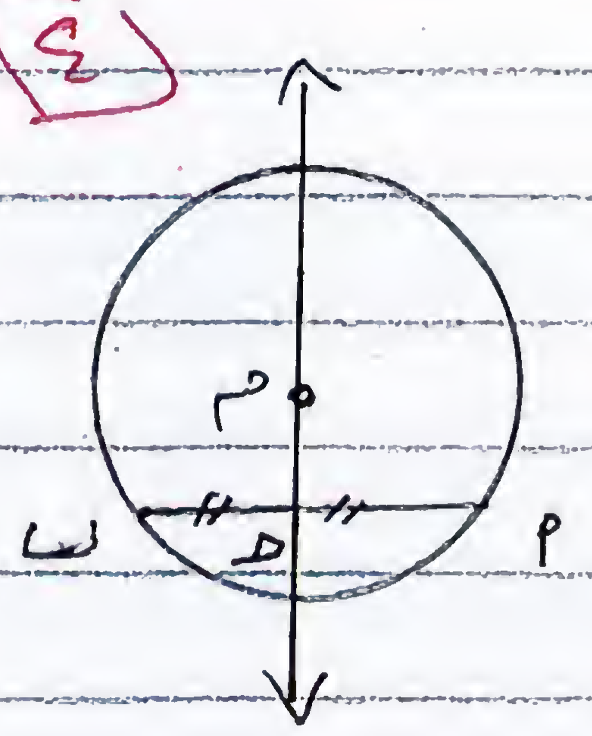
قطر الدائرة: هو الوتر المار بمركز الدائرة ، هو اطول وتر في الدائرة

محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق^2 وحدة مربعة

٤

* نتائج هامه *

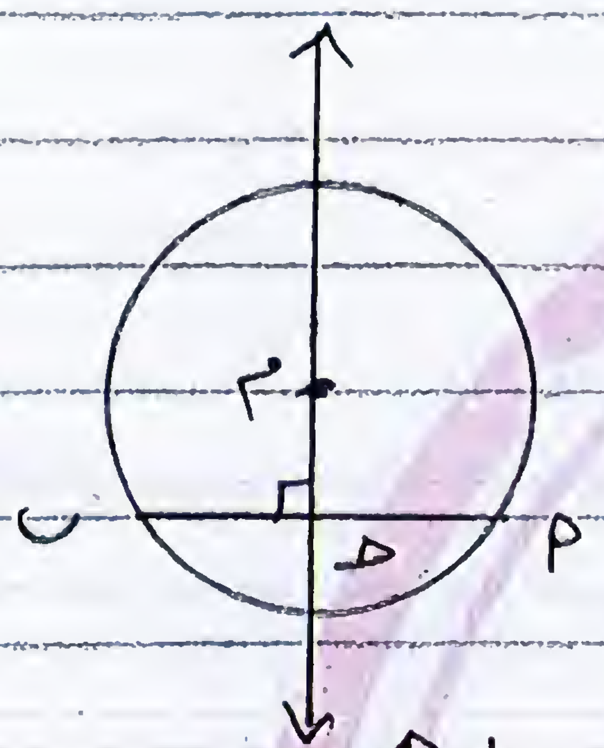


نتيجه (١) المستقيم المار بمركز الدائره وبمنتصف أى وتر فيها يكون عمودياً على هذا الوتر

أى أنه فى الشكل المقابل:

إذا كان $\overline{أب}$ وتر فى الدائره م ، ح منتصف $\overline{أب}$

فإن م ح ⊥ $\overline{أب}$

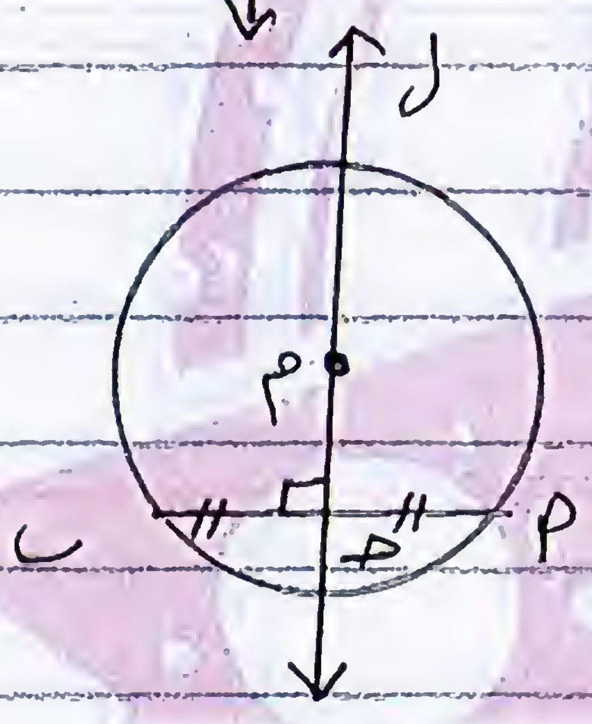


نتيجه (٢) المستقيم المار بمركز الدائره عمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

أى أنه فى الشكل المقابل:

إذا كان $\overleftrightarrow{مح}$ ⊥ $\overline{أب}$ فإن

ح تكون منتصف $\overline{أب}$ أى أح = حب



نتيجه (٣) المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائره من منتصفه يمر بمركز هذه الدائرة

ملاحظات هامة:

① أى مستقيم يمر بمركز الدائره هو محور تماثل لها

② عدد محاور تماثل الدائره هو عدد لا نهائى

③ عدد محاور تماثل نصف الدائره = ١

تذكر: حالات تطابق المثلثات:

① ضلعان وزاويه محصورة ③ الأضلاع الثلاثه

② زاويتان وضلع واصل ④ ضلع ووتر فى المثلث القائم

أضف إلى قاموسك إذا كان عمودى ∴ منتصف

إذا كان منتصف ∴ عمودى

مثال في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس حيث م مركز الدائرة :

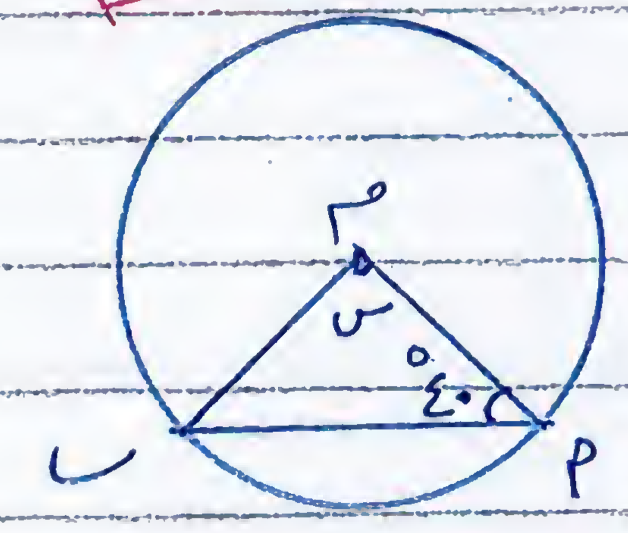
٥

الحل

① ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(أ^) = ق(ب^) = ٤٠°

∴ س = ١٨٠ − (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠°

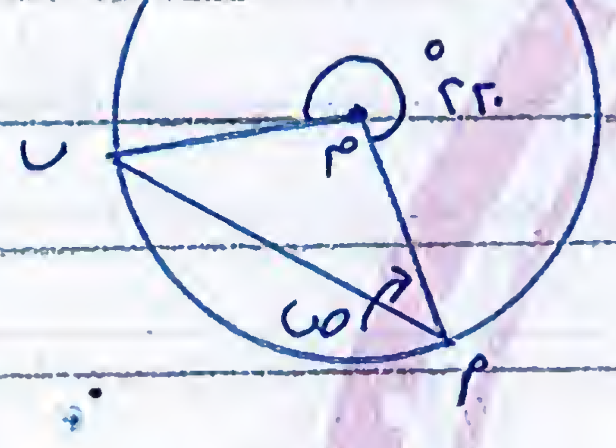


② ق(أ م^ ب المنعكسة) = ٢٢٠°

∴ ق(أ م^ ب) = ٣٦٠ − ٢٢٠ = ١٤٠°

∵ م أ = م ب = نق ∴ ق(أ^) = ق(ب^) = $\frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢}$

= $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠°



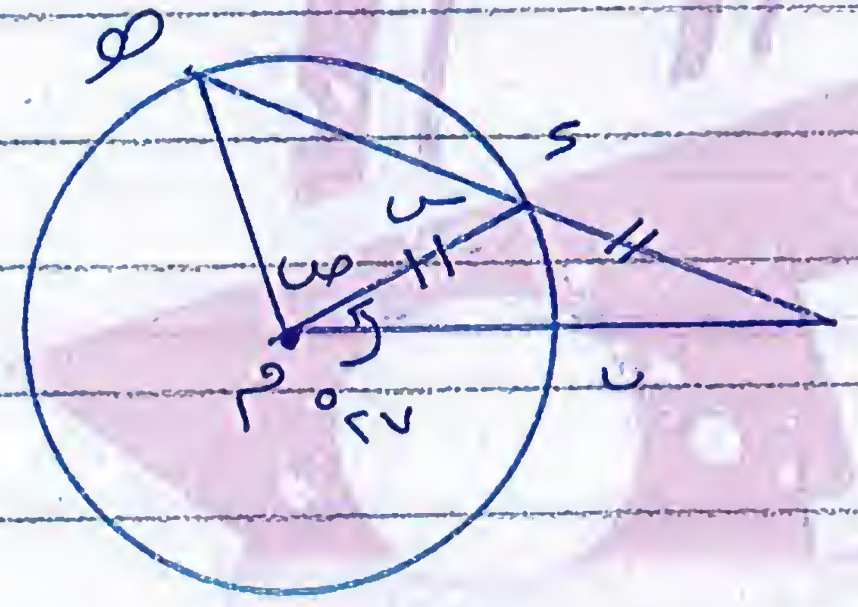
③ في △ أ د م ∵ د أ = د م ∴ ق(أ^) = ٢٧°

∵ د هـ د م خارجة عن △ أ د م

∴ س = ٢٧ + ٢٧ = ٥٤°

في △ م د هـ ∵ م د = م هـ = نق ∴ ق(م د^ هـ) = ق(م هـ^ د) = ٢٧ أ

∴ ص = ق(د م هـ) = ١٨٠ − (٢٧ + ٢٧) = ١٢٦°



④ △△ أ م ب ، حـ م ب

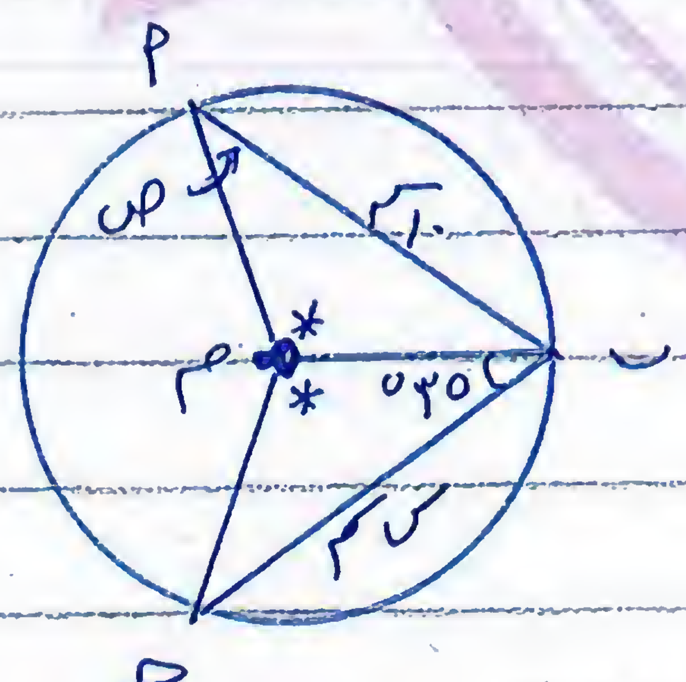
فيهما { م أ = م حـ = نق
م ب ضلع مشترك
ق(أ م^ ب) = ق(حـ م^ ب) }

∴ △ أ م ب ≡ △ حـ م ب وينتج من التطابق أن

س = ب حـ = أ ب = ١٠ سم ، ق(أ ب^ م) = ق(حـ ب^ م) = ٣٥°

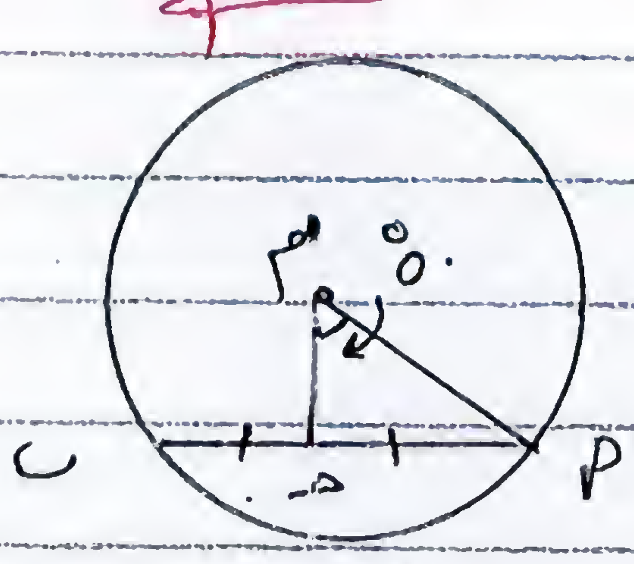
في △ م أ ب ∵ م أ = م ب = نق

∴ ص = ق(أ ب^ م) = ٣٥°



٦

في كل من الأشكال الآتية م دائرة ، أكمل :

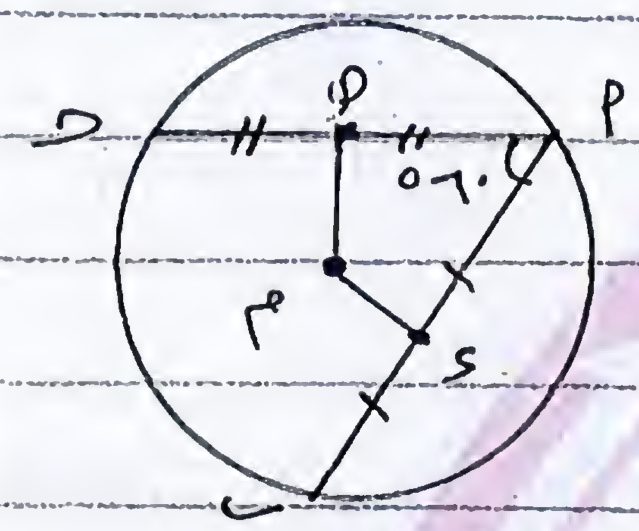


ق(∠م أ جـ) = ...

[١] ∵ أب وتر في الدائرة م ، جـ منتصف أب

∴ م جـ ⊥ أب

∴ ق(∠م أ جـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٥٠) = ٤٠°



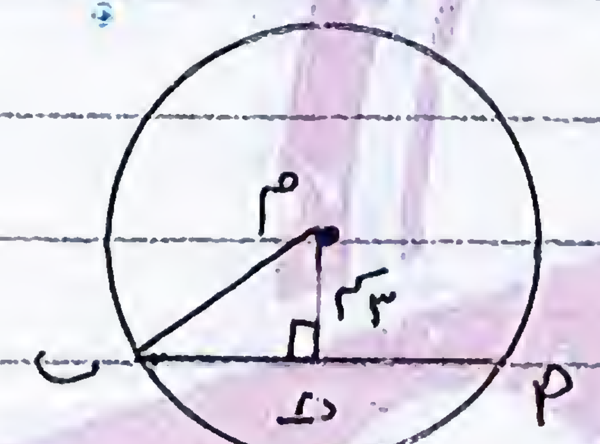
ق(∠د م هـ) = ...

[٢] ∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ

∵ د منتصف أب ∴ م د ⊥ أب

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠د م هـ) = ٣٦٠ − (٦٠ + ٩٠ + ٩٠) = ١٢٠°



أب = ٨ سم

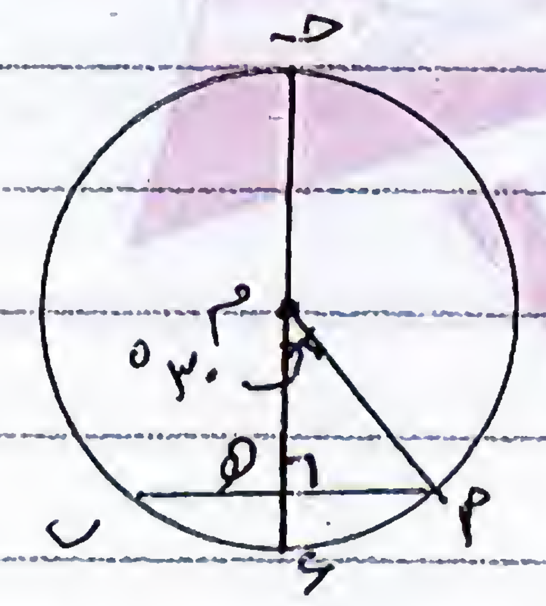
م ب = ... سم

[٣] ∵ أب وتر في الدائرة م ، م جـ ⊥ أب

∴ جـ منتصف أب ∴ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أب = ٤ سم

من نظرية فيثاغورث (في Δ م جـ ب القائم في جـ)

(م ب)^2 = (٣)^2 + (٤)^2 = ٢٥ ∴ م ب = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم



أب = ١٠ سم فإن:

جـ د = ... سم

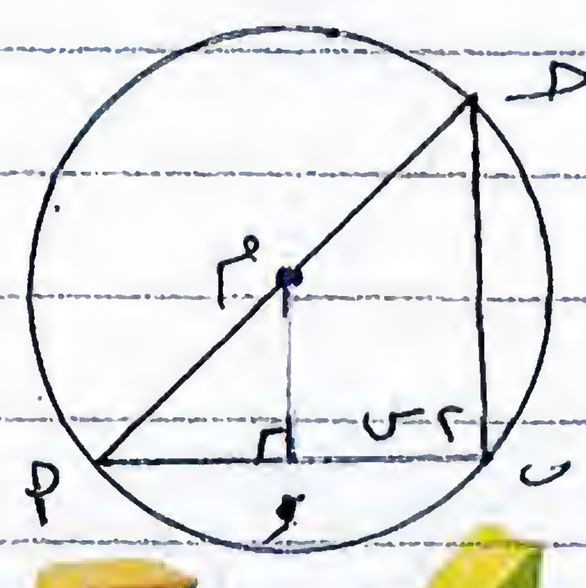
[٤] ∵ م جـ قطر في الدائرة م ، م هـ ⊥ أب

∴ هـ منتصف أب ∴ أهـ = $\frac{1}{2}$ أب = ٥ سم

∵ ق(∠أ م هـ) = ٣٠° ∴ أهـ = $\frac{1}{2}$ أم " مقابل للزاوية ٣٠° "

∴ أم = نق = ١٠ سم

∴ جـ د = ٢ نق = ٢٠ سم



س = ...

[٥] ∵ م د ⊥ أب ∴ د منتصف أب

∵ د منتصف أب ، م منتصف أجـ

∴ د م // ب جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠م د أ) = ٩٠° بالتناظر

∴ ٢ س = ٩٠ ÷ ٢ ∴ س = ٤٥°

٧

[٦] في △ أ م هـ القائم في هـ

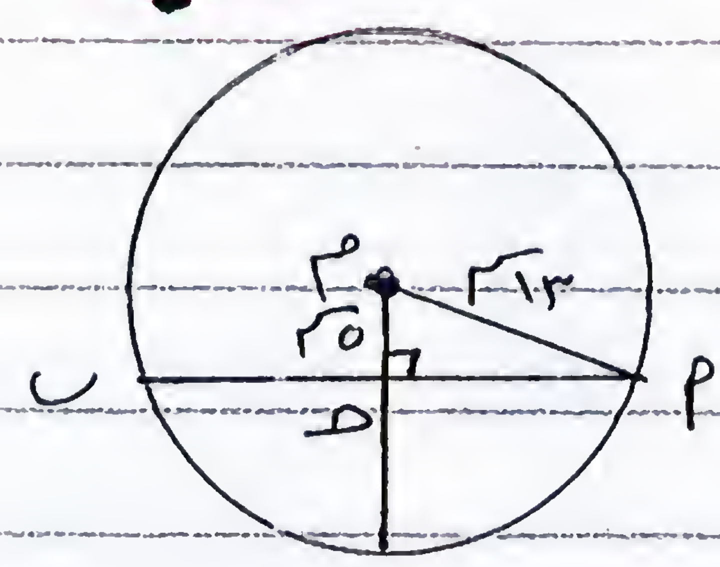
من نظرية فيثاغورث: (أهـ)^{٢} = (١٣)^{٢} − (٥)^{٢} = ١٤٤ سم^{٢}

∴ أهـ = √١٤٤ = ١٢ سم

∵ م هـ ⊥ أب ∴ هـ منتصف أب

∴ أب = ٢ أهـ = ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

، هـ د = م د − م هـ = ١٣ − ٥ = ٨ سم



أب = ... سم

هـ د = ... سم

[٧] في △ أ م ب

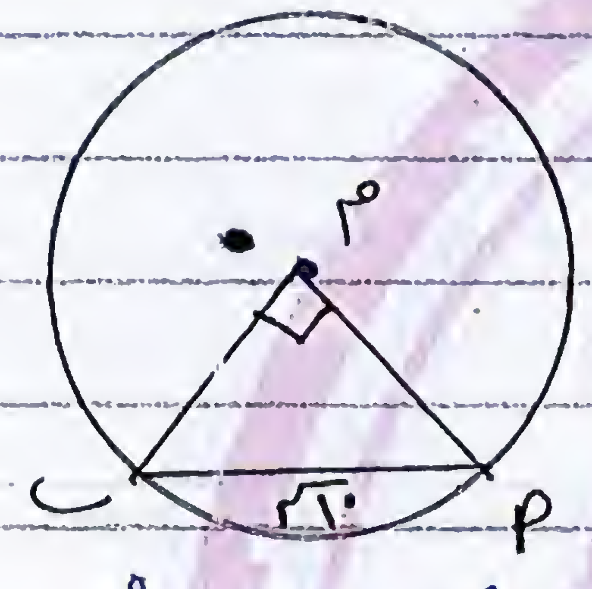
∵ م أ = م ب = نق ∴ ق(أ̂) = ق(ب̂) = (١٨٠ − ٩٠)/٢ = ٤٥°

من نظرية فيثاغورث (أب)^{٢} = (م أ)^{٢} + (م ب)^{٢}

∴ نق^{٢} + نق^{٢} = (أب)^{٢}

٢ نق^{٢} = ١٠٠ ÷ ٢ ∴ نق^{٢} = ٥٠

∴ نق = √٥٠ = ٥√٢ سم



ق(أ̂) = ... °

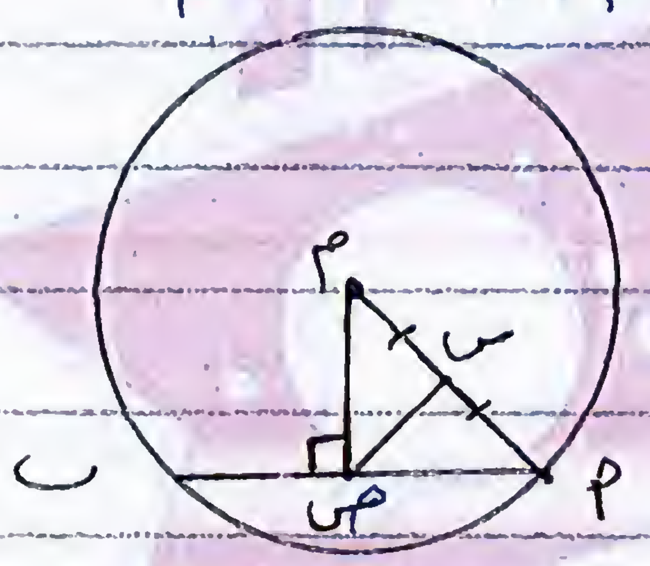
م أ = ... سم

[٨] في △ أ م ص القائم في ص

∵ س ص متوسط خارج من رأس القائمة ∴ س ص = ½ أم

∴ أ م = ٢ × ٧ = ١٤ سم ∴ نق = ١٤ سم

مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ٢٢/٧ × (١٤)^{٢} = ٦١٦ سم^{٢}

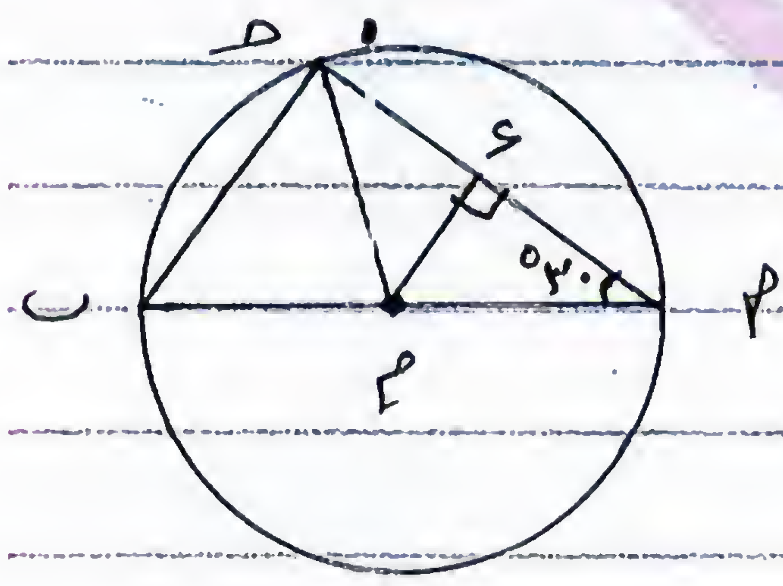


س ص = ٧ سم ، π = ٢٢/٧

مساحة الدائرة = ... سم^{٢}

من الشكل المقابل: أب قطر في الدائرة م ، م د ⊥ أجـ ، ق(أ̂) = ٣٠° أثبت أن:

① م د // ب جـ . ② △ م ب جـ متساوي الأضلاع.



البرهان: ∵ م د ⊥ أجـ ∴ د منتصف أجـ

∵ م منتصف أب ، د منتصف أجـ ∴ م د // ب جـ . ①

∵ ق(أجـ̂ب) = ق(أد̂م) = ٩٠° بالتناظر

في △ أ ب جـ ق(ب̂) = ١٨٠ − (٣٠ + ٩٠) = ٦٠° .

، ∵ م ب = م جـ = نق ∴ △ م ب جـ متساوي الأضلاع

الدرس الثاني : موضع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة : (٨)

أولاً موضع نقطة بالنسبة للدائرة :

وإذا كان :

م أ > نق ⟸ فإن النقطة أ تقع خارج الدائرة

م أ = نق ⟸ فإن النقطة أ تقع على الدائرة

م أ < نق ⟸ فإن النقطة أ تقع داخل الدائرة .

حيث م أ هو بعد النقطة أ عن مركز الدائرة م

ثانياً موضع مستقيم بالنسبة للدائرة :

وإذا كان :

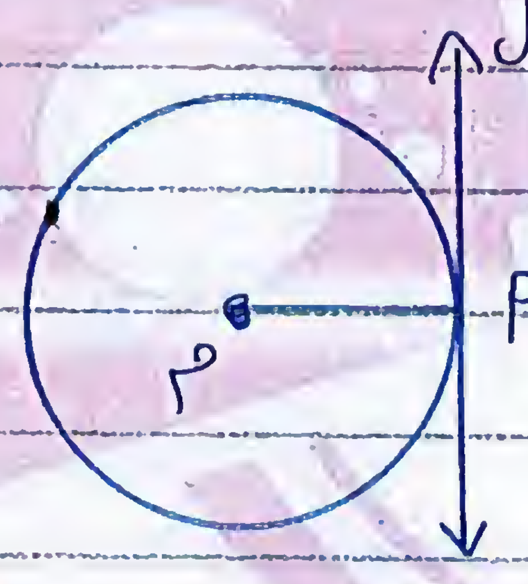
م أ > نق ⟸ فإن المستقيم يقع خارج الدائرة

م أ = نق ⟸ فإن المستقيم يكون مماساً للدائرة

م أ < نق ⟸ فإن المستقيم يكون قاطعاً للدائرة

حيث م أ هو طول العمود النازل من مركز الدائرة على المستقيم ل

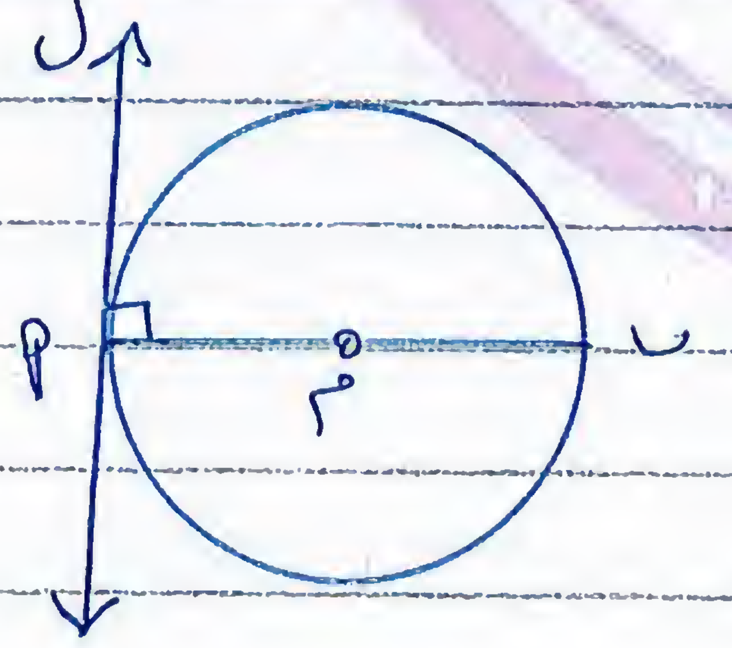
حقيقتان هامتان :



(١) المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

أي أنه : إذا كان ل مماس للدائرة م عند أ

∴ م أ ⊥ ل



(٢) المستقيم العمودي على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً لها .

أي أنه إذا كان أ ب قطر في الدائرة م ، ل ⊥ أ ب

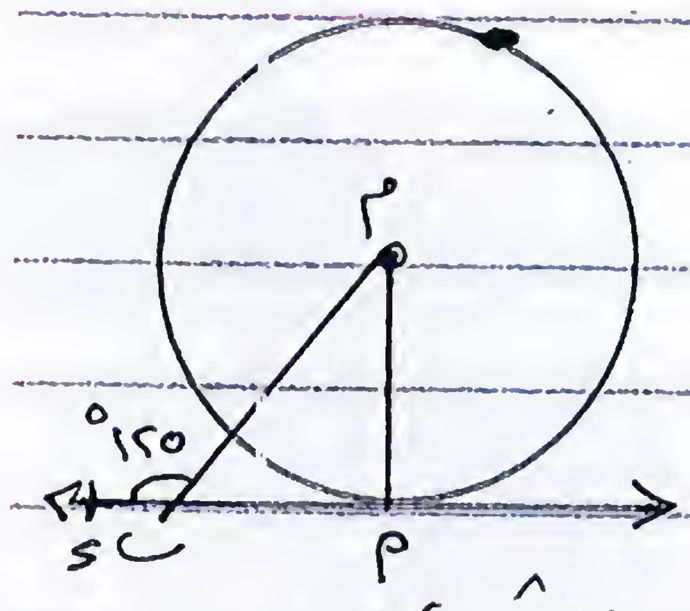
فإن ل يكون مماس للدائرة عند أ

أضف إلى قاموسك : إذا كان عمودي ∴ مماس

إذا كان مماس ∴ عمودي

المماسان المرسومان من نهايتي قطر في الدائرة يكونان متوازيان

مثال: في كل من الأشكال الآتية م دائرة، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس، أكمل

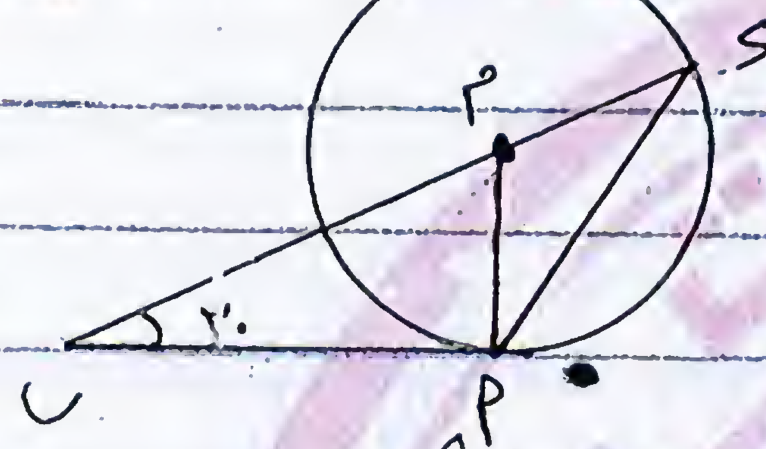


ق(∠ أ م ب) = ...

(١) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند أ ∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∵ ∠ م ب د خارجة عن △ م أ ب

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٢٥ − ٩٠ = ٣٥°



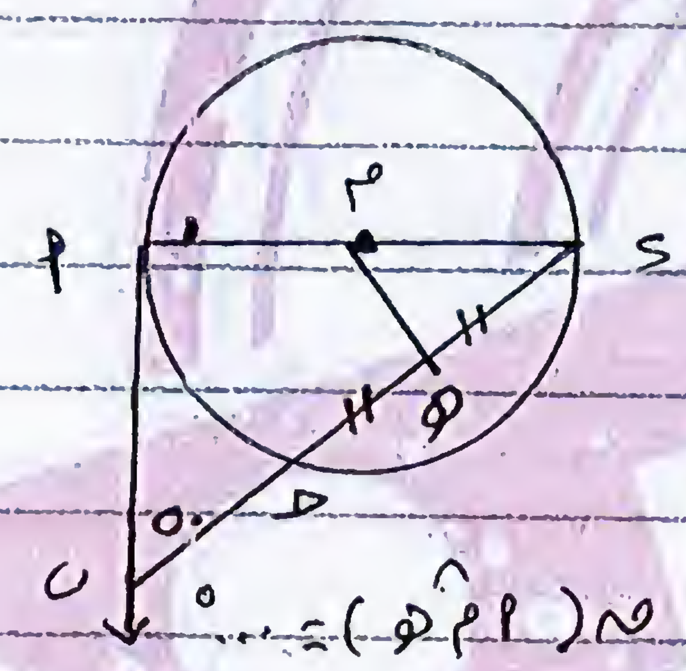
ق(∠ أ د ب) = ...

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند أ ∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∵ ∠ د م أ خارجة عن △ أ م ب

∴ ق(∠ د م أ) = ٩٠ + ٣٠ = ١٢٠°

∵ م أ = م د = نق ∴ ق(∠ د) = ق(∠ م أ د) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°



ق(∠ أ م هـ) = ...°

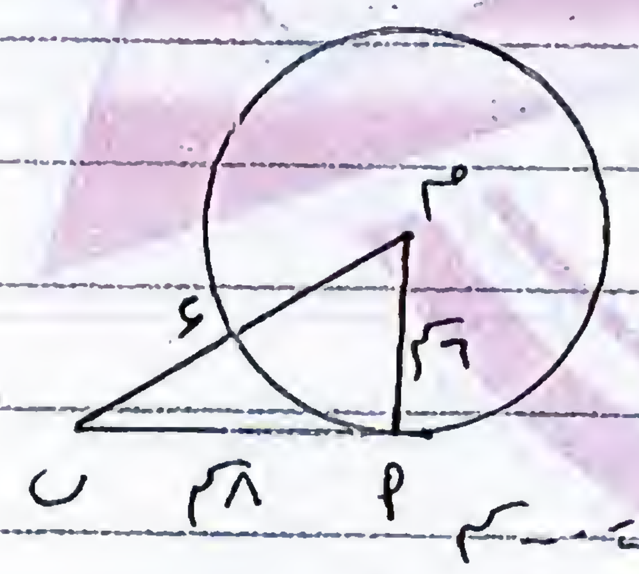
(٣) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∵ هـ منتصف $\overline{دجـ}$ ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{دجـ}$

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ هـ م أ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٥٠) = ١٣٠°



ب د = ... سم

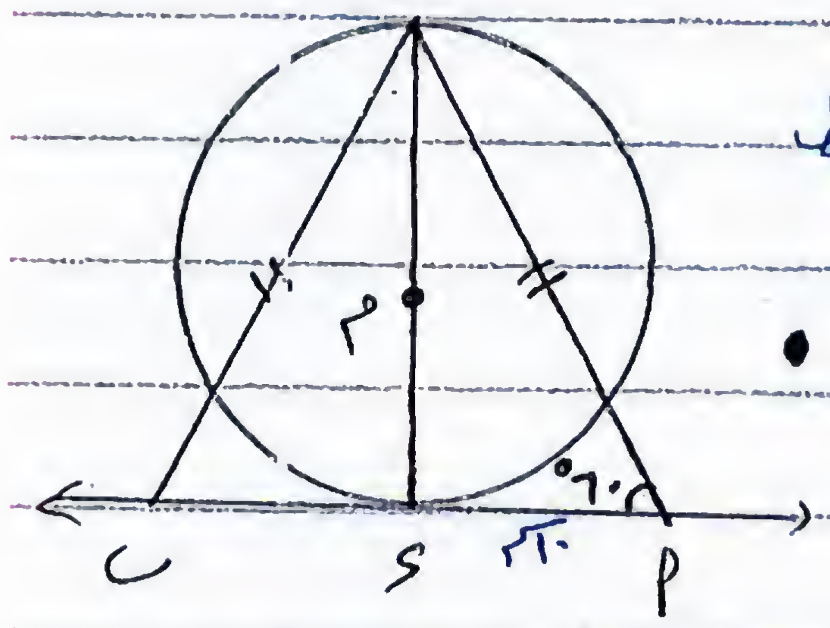
(٤) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∴ △ م أ ب القائم في أ من نظرية فيثاغورث

(م ب)² = ٦² + ٨² = ١٠٠ ∴ م ب = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

∴ ب د = ١٠ − ٦ = ٤ سم



محيط △ أ ب هـ = ... سم

(٥) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند د ∴ $\overline{هـد} \perp \overline{أب}$

∵ △ أ هـ ب فيه أ هـ = ب هـ ، $\overline{هـد} \perp \overline{أب}$ ∴ هـ د متوسط

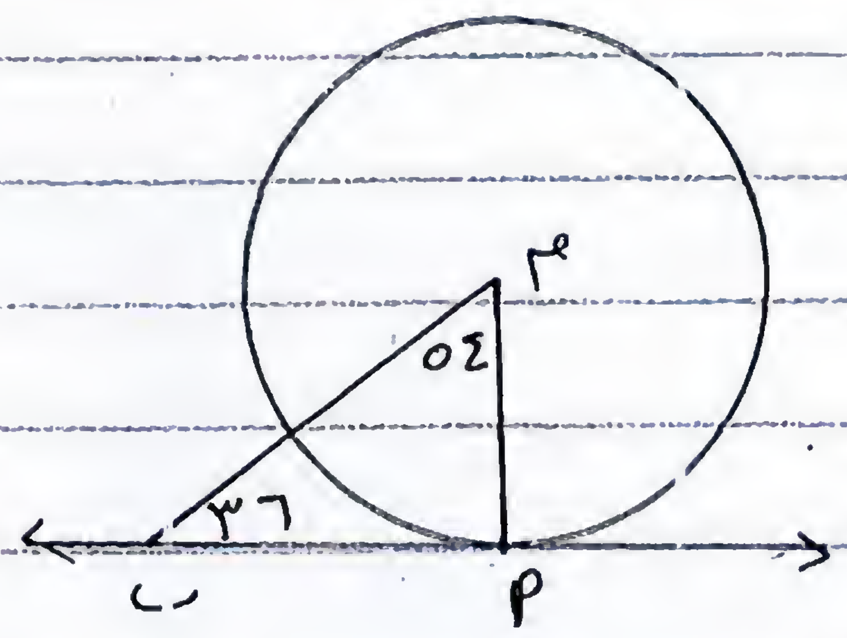
∴ أ ب = ٢٠ سم ، ∵ ق(∠ أ) = ٦٠°

∴ △ أ ب هـ متساوي الأضلاع

∴ محيط △ أ ب هـ = ٣ × ٢٠ = ٦٠ سم

في كل من الأشكال الآتية اثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م : (11)

[1] في Δ أ م ب

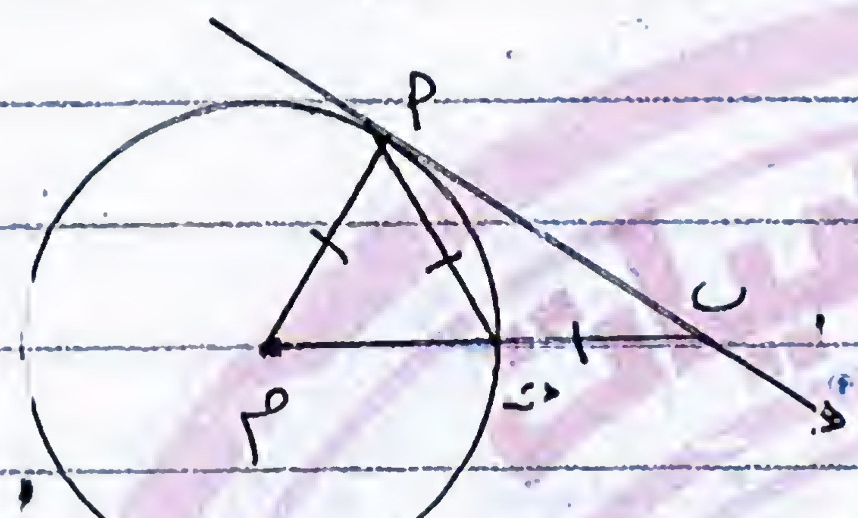


ق(∠م أ ب) = ١٨٠ − (٣٦ + ٥٤) = ٩٠°

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أب}$

∵ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

[2] ∵ م أ = م جـ = نق



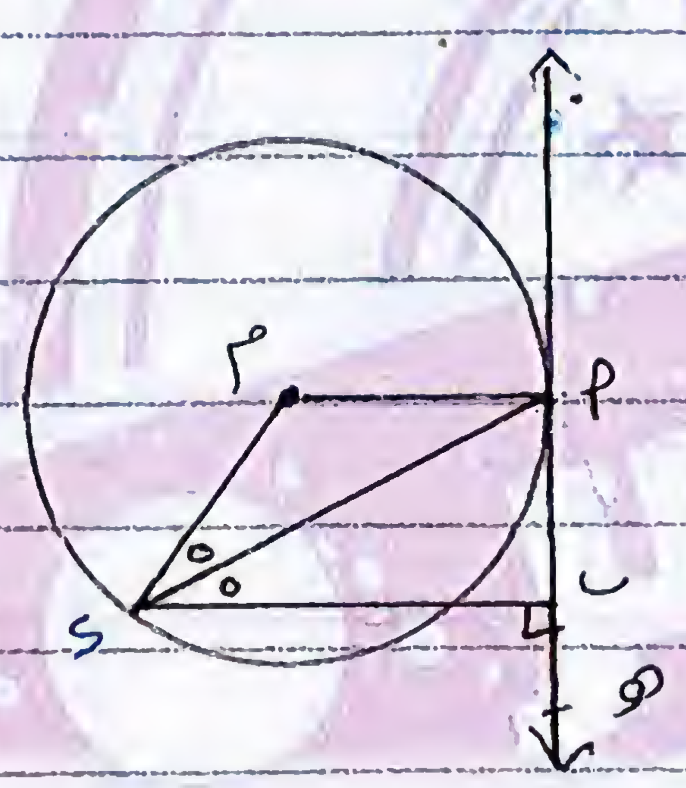
∴ في Δ أ ب م يكون $\overline{أجـ}$ متوسط ، أ جـ = ½ ب م

∴ $\overline{أجـ}$ متوسط ، أ جـ = ½ ب م

∴ ق(∠ب أ م) = ٩٠°

∴ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{أم}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند أ

[3] في Δ أ م د ∵ م أ = م د = نق



∴ ق(∠م أ د) = ق(∠م د أ) ... (1)

∵ $\overrightarrow{د أ}$ ينصف ∠ د ∴ ق(∠م د أ) = ق(∠أ د ب) ... (2)

من (1) ، (2) ∴ ق(∠د أ م) = ق(∠أ د ب)

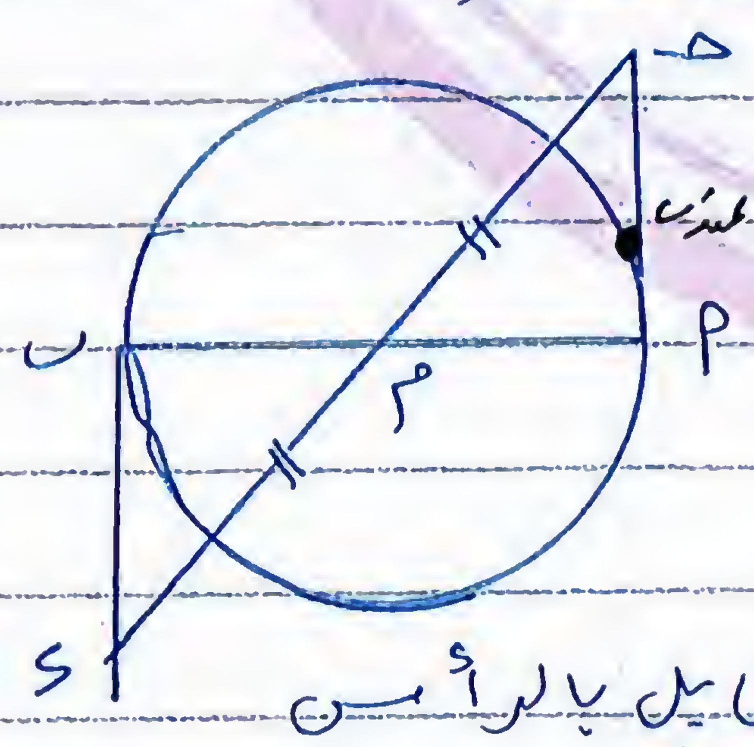
وهما في وضع تبادل ∴ $\overline{أم}$ // $\overline{ب د}$

∴ ق(∠ب أ م) = ق(∠هـ ب د) = ٩٠° بالتناظر

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

في الشكل المقابل: $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس لها عند أ

رسم $\overrightarrow{جـ م}$ ومد على نقطة د بحيث د م = م جـ اثبت أن: $\overleftrightarrow{ب د}$ مماس للدائرة م عند ب



الحل: ∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة عند أ ∴ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أجـ}$

Δ Δ أ م جـ ، ب م د فيهما:
- م جـ = م د
- م أ = م ب = نق
- ق(∠أ م جـ) = ق(∠ب م د) بالتقابل بالرأس

∴ Δ أ م جـ ≡ Δ ب م د وينتج من التطابق أن

ق(∠ب) = ق(∠أ) = ٩٠° ∴ $\overleftrightarrow{ب د}$ مماس للدائرة عند ب

* موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى *

(11)

بفرض أن م، ن دائرتين طول نصفي قطريهما نق$_1$، نق$_2$ على الترتيب، نق$_1$ > نق$_2$، م ن البعد بين مركزيهما،

إذا كانت

- م ن > نق$_1$ + نق$_2$ فإن الدائرتين تكونان متباعدتين أو م ن ∈]نق$_1$ + نق$_2$، ∞[
- م ن = نق$_1$ + نق$_2$ فإن الدائرتين تكونان متماستين من الخارج
- م ن ∈]نق$_1$ − نق$_2$، نق$_1$ + نق$_2$[أو نق$_1$ − نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$ فإن الدائرتان تكونان متقاطعتان
- م ن = نق$_1$ − نق$_2$ فإن الدائرتان تكونان متماستان من الداخل
- م ن < نق$_1$ − نق$_2$ أو م ن ∈]0، نق$_1$ − نق$_2$[فإن الدائرتان تكونان متداخلتان
- م ن = صفر فإن الدائرتان تكونان متحدتا المركز

نتائج هامة:

① خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ويكون عمودياً على المماس المشترك عند هذه النقطة

② خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه

ملحوظة هامة جداً:

إذا كانت م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب فإن $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ يكون محور تماثل أ ب

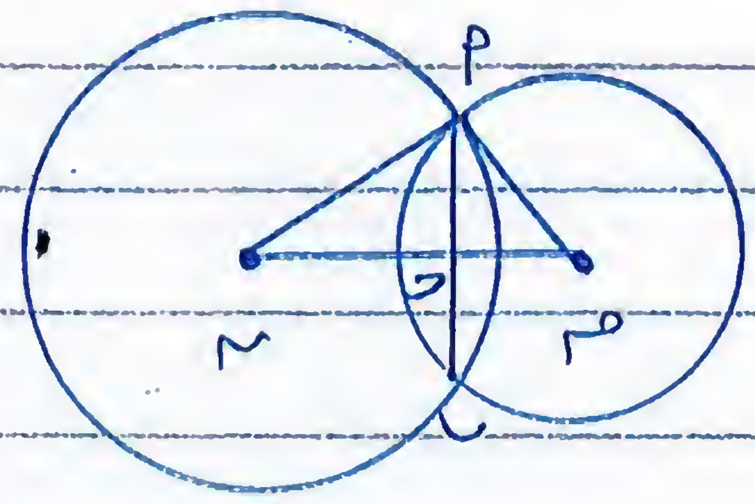
① إذا كانت م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب ∴ م ن ⊥ أ ب

② إذا كانت م، ن دائرتان متماستان عند أ ∴ م ن ⊥ المماس المشترك

أضف إلى قاموسك

مثال: من الشكل المقابل:

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، $\overline{أب}$ ∩ $\overline{م ن}$ = {جـ}
فإذا كان: م أ = ٦ سم ، ن أ = ٨ سم ، م ن = ١٠ سم
أوجد طول $\overline{أب}$.



الحل: في ∆ أ م ن

∵ $(أم)^2 + (أن)^2 = ٦^2 + ٨^2 = ١٠٠ = (م ن)^2$

∴ ∆ أ م ن قائم الزاوية في أ

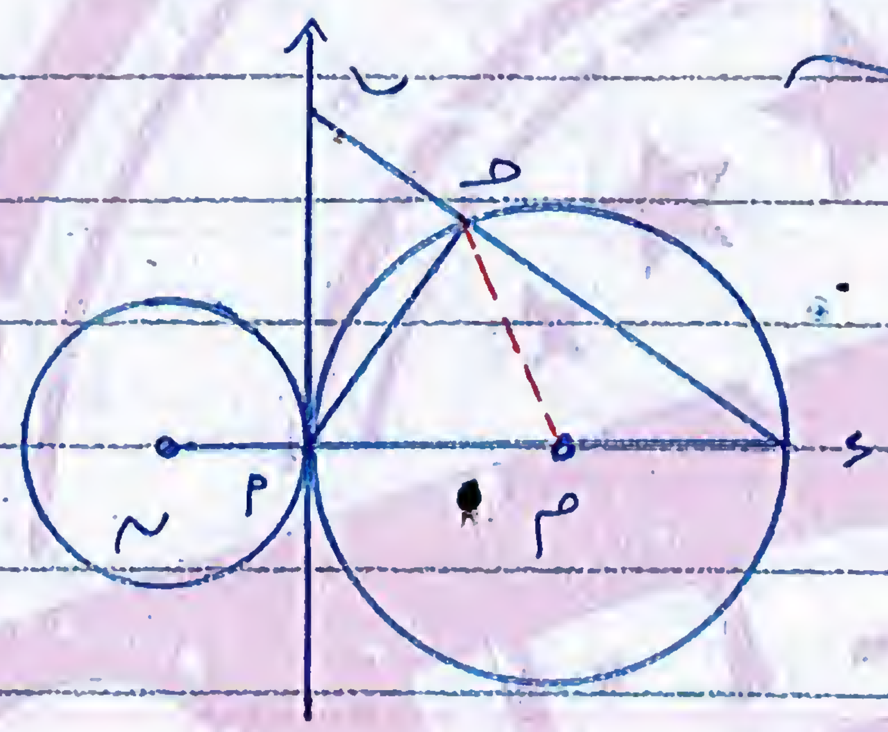
∵ م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ∴ $\overline{م ن}$ ⊥ $\overline{أب}$ وينصفه ∴ جـ منتصف $\overline{أب}$

في ∆ أ م ن القائم في أ ، $\overline{أجـ}$ ⊥ $\overline{م ن}$ (إقليدس)

∴ أ جـ = $\frac{أم \times أن}{م ن} = \frac{٦ \times ٨}{١٠} = ٤,٨$

∴ أب = ٢ أ جـ = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم

مثال: من الشكل المقابل:



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في نقطة أ ،
ل مماس مشترك لهما عند أ ، $\overline{أد}$ قطر في الدائرة م
أب = م ن = ٦ سم ، ب جـ = ٣,٦ سم
(١) أثبت أن: ق(∠أ جـ د) = ٩٠° (٢) أوجد: طول $\overline{أن}$

الحل: في ∆ أ جـ د ∵ م منتصف $\overline{أد}$ ∴ $\overline{جـ م}$ متوسط ، جـ م = $\frac{1}{2}$ أد

∴ ق(∠أ جـ د) = ٩٠° .... (أولاً)

∵ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في نقطة أ

∴ $\overline{م ن}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$

في ∆ أ ب د القائم في أ ، $\overline{أجـ}$ ⊥ $\overline{ب د}$ (إقليدس)

∴ $(أب)^2$ = ب جـ × ب د ∴ ٣٦ = ٣,٦ × ب د ∴ ب د = $\frac{٣٦}{٣,٦}$ = ١٠ سم

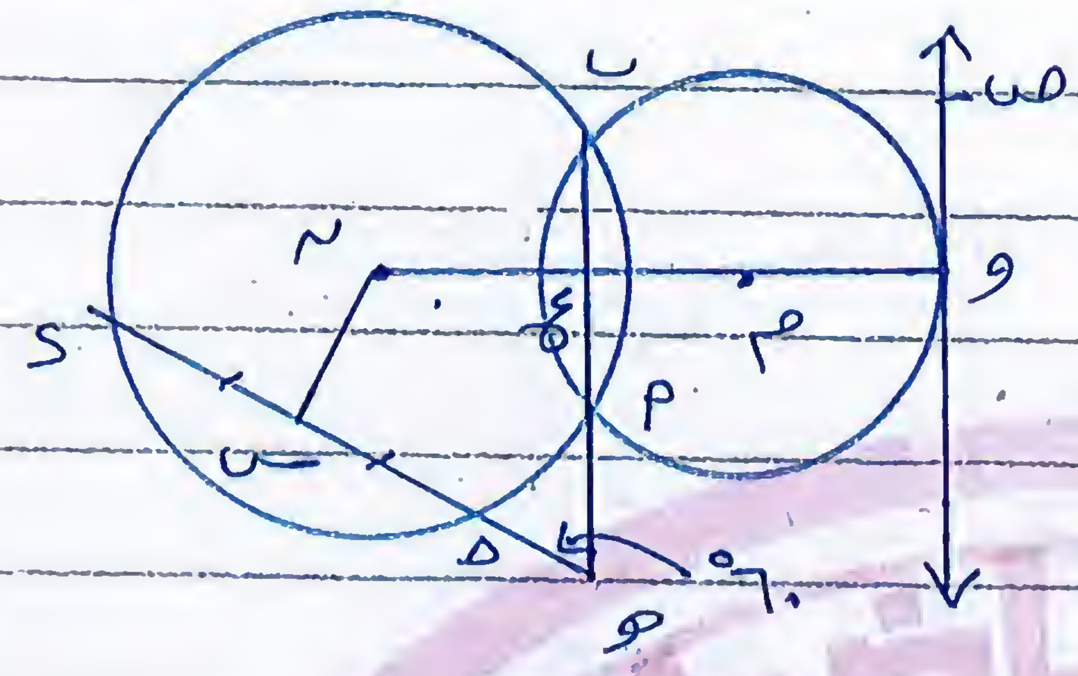
من فيثاغورث ∴ $(أد)^2 = (ب د)^2 - (أب)^2 = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$

∴ أد = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

∴ أم = ٤ سم ، ∴ أن = ٦ − ٤ = ٢ سم

١٣

في الشكل المقابل:



دائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب

، س منتصف الوتر $\overline{هـ د}$

، $\overleftarrow{ده} \cap \overleftarrow{بأ} = \{هـ\}$ حيث ق(∠هـ) = ٦٠°

، $\overleftrightarrow{ص و}$ مماس الدائرة م عند و حيث $\overleftarrow{نم} \cap \overleftrightarrow{ص و} = \{و\}$

أولاً أوجد: ق(∠ع ن س)   ثانياً أثبت أن: $\overleftrightarrow{ص و} \parallel \overline{أب}$

الحل

∵ م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب   ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{أب}$

∵ س منتصف $\overline{هـ د}$ ∴ $\overline{ن س} \perp \overline{هـ د}$

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ع ن س) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠) = ١٢٠° ... (أولاً)

∵ $\overleftrightarrow{ص و}$ مماس للدائرة م عند و   ∴ $\overleftrightarrow{ص و} \perp \overleftrightarrow{و م}$

∵ $\overline{أب} \perp \overleftrightarrow{م ن}$ ، $\overleftrightarrow{ص و} \perp \overleftrightarrow{م ن}$ ∴ $\overleftrightarrow{ص و} \parallel \overline{أب}$

" المحوريان على ثالث متوازيان "

١٤

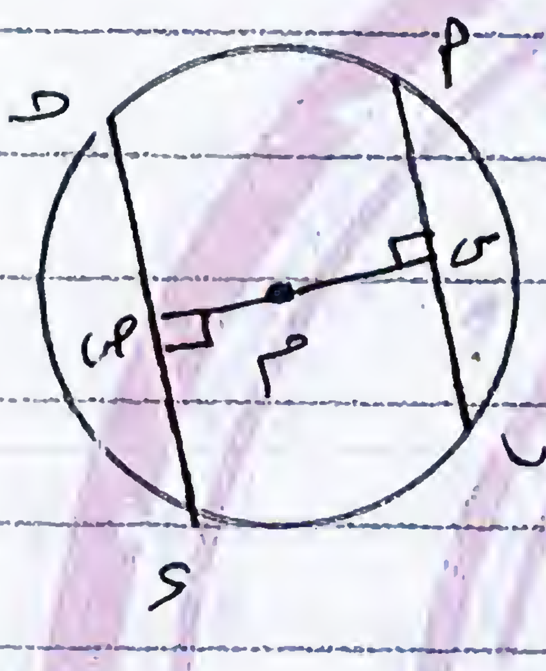
علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية:
"الأوتار المتساوية في دائرة على أبعاد متساوية من مركزها"

نتيجة:
الأوتار المتساوية في الطول في الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من المركز

عكس النظرية: في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول"

أي أنه في الشكل المقابل:



إذا كان أ ب = جـ د ، م س ⊥ $\overline{أب}$ ، م ص ⊥ $\overline{جد}$

فإن م س = م ص

والعكس صحيح:

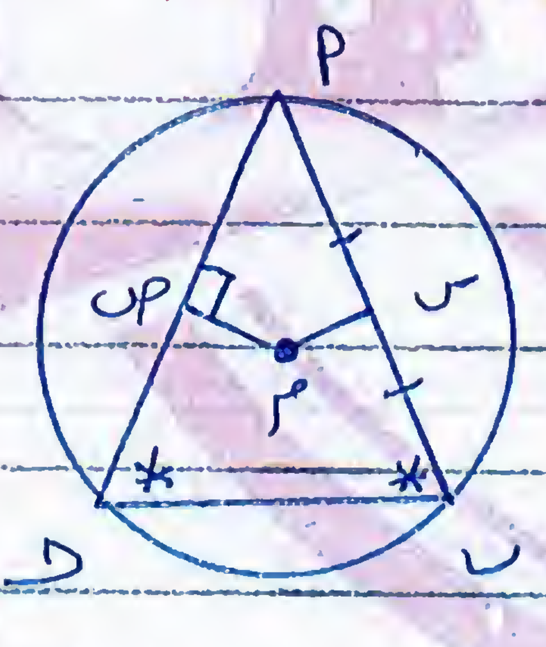
إذا كان م س = م ص ، م س ⊥ $\overline{أب}$ ، م ص ⊥ $\overline{جد}$

فإن أ ب = جـ د

إذا كان وتر = وتر فإن بعد = بعد

(أضف إلى قاموسك) إذا كان بعد = بعد فإن وتر = وتر

في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث مرسوم داخل م فيه



(وتر = وتر)

ق(∠ب) = ق(∠جـ) ، س منتصف $\overline{أب}$ ، م ص ⊥ $\overline{أجـ}$

اثبت أن: م س = م ص

البرهان في △ أ ب جـ ∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ∴ أ ب = أ جـ ..... ①

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ م س ⊥ $\overline{أب}$ ..... ②

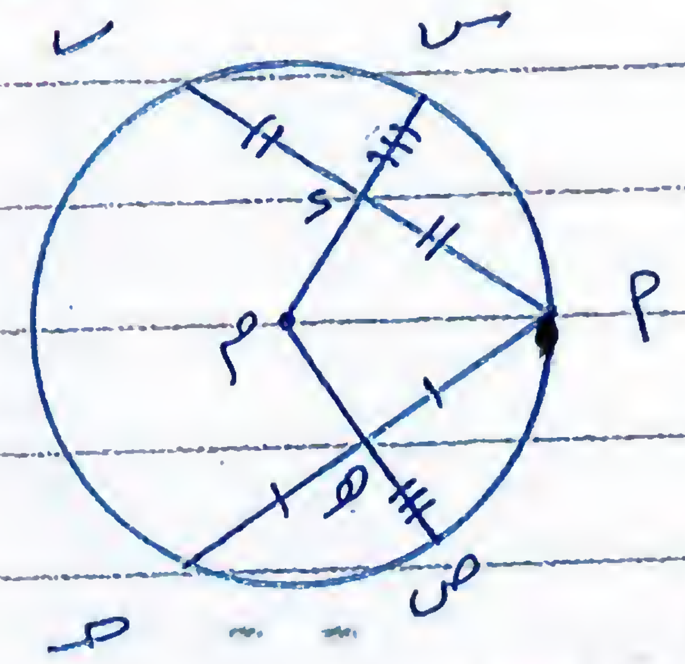
∵ أ ب = أ جـ ، م س ⊥ $\overline{أب}$ ، م ص ⊥ $\overline{أجـ}$

∴ م س = م ص (بعد = بعد) #

(أضف إلى قاموسك) في المثلث إذا كان ضلع = ضلع ∴ زاوية = زاوية
والعكس إذا كان قياس زاوية = قياس زاوية ∴ ضلع = ضلع

١٥

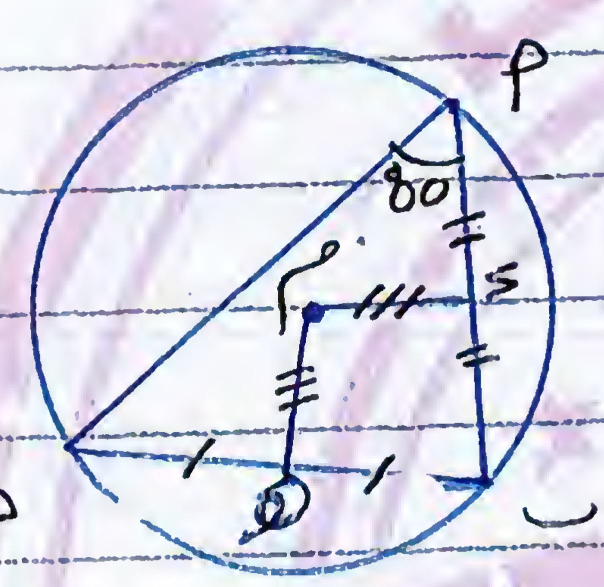
من الشكل المقابل:



أب ، أجـ وتران في الدائرة م حيث ء منتصف أب
، هـ منتصف أجـ ، ءس = هـص
إثبت أن: أب = أجـ

الحل: ∵ م س = م ص = نق ...... (١)
، م ء = م هـ ...... (٢) بطرح ٢ من ١
∴ م ء = م هـ ...... (٣) (بعد = بعد)
∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب ، هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ ...... (٤)
من (٣) ، (٤) ∴ أب = أجـ (وتر = وتر)

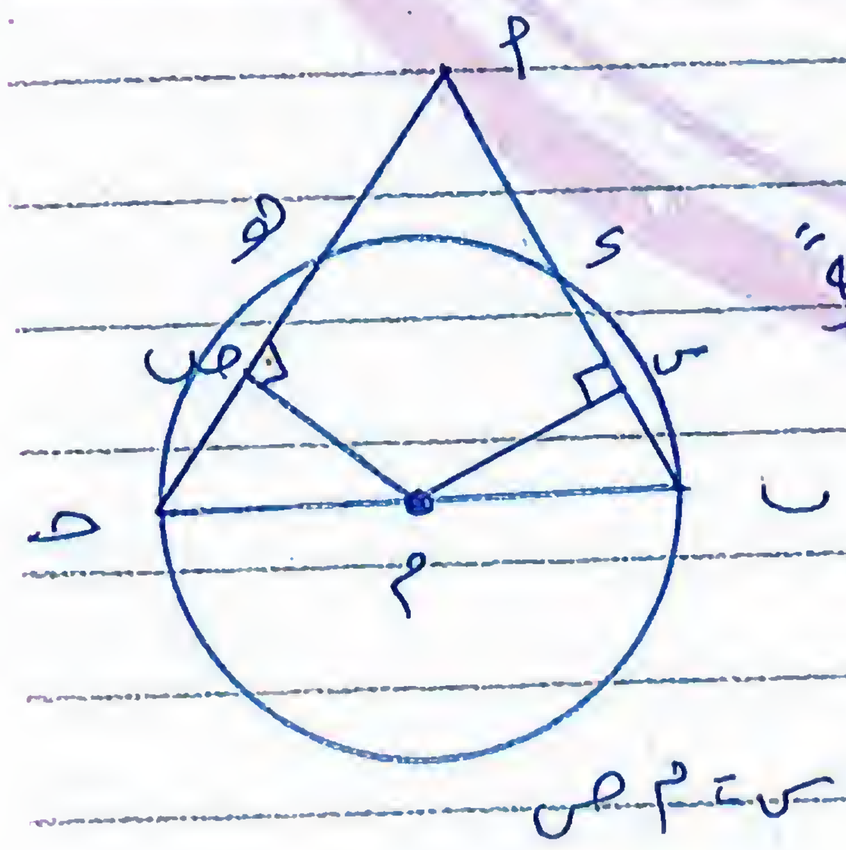
من الشكل المقابل: △ أبجـ مرسوم داخل دائرة مركزها م



فإذا كان ق(∠أ) = ٥٥° ، ء منتصف أب ، هـ منتصف بجـ
، م ء = م هـ أوجد ق(∠جـ)

الحل: ∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب
∵ هـ منتصف بجـ ∴ م هـ ⊥ بجـ
∵ م ء = م هـ ∴ أب = بجـ
في △ أبجـ ∵ أب = بجـ ∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) = ٥٥°
∴ ق(∠ب) = ١٨٠ – (٥٥ + ٥٥) = ٧٠°

△ أبجـ فيه أب = أجـ رسمت دائرة مركزها م وقطرها بجـ تقطع أب في ء
وقطعت أجـ في هـ ، رسم م س ⊥ بء تقطعها في س ، م ص ⊥ جـهـ تقطعها في ص
إثبت أن: بء = جـهـ

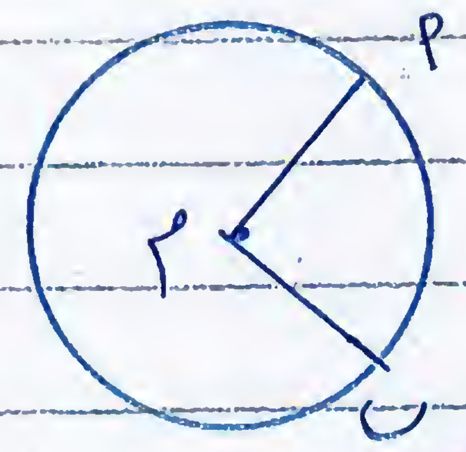


الحل: في △ أبجـ ∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)
∴ ق(∠ب م س) = ق(∠جـ م ص) "متممات الزوايا المتساوية تكون متساوية"
△△ م س ب ، م ص جـ
فيهما: م ب = م جـ = نق
ق(∠ب) = ق(∠جـ)
ق(∠س م ب) = ق(∠جـ م ص)
∴ △ م س ب ≡ △ م ص جـ وينتج من التطابق أن م س = م ص
∵ م س = م ص ، م س ⊥ بء ، م ص ⊥ جـهـ ∴ بء = جـهـ

١٧

الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الزاوية المركزية: هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فيها



$\angle$ أ م ب تسمى زاوية مركزية

قياس القوس: هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

أي أن ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\angle$ أ م ب)

طول القوس: هو جزء من محيط دائرته يتناسب مع قياسه

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠} \times \text{محيط الدائرة}$$

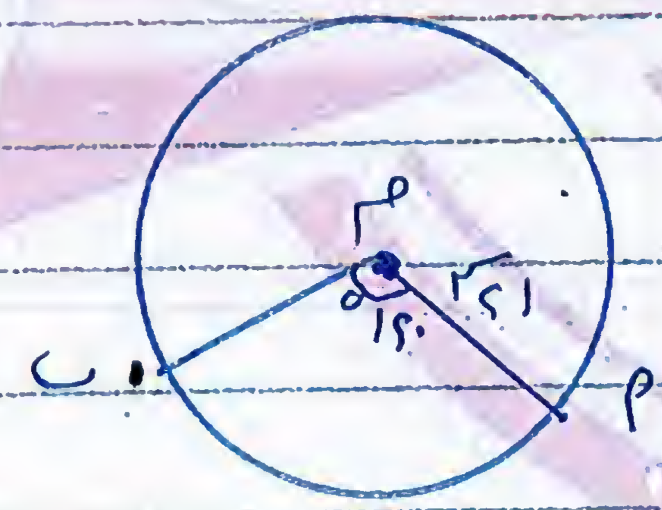
ملاحظات هامة:

① قياس الدائرة = ٣٦٠° بينما طول الدائرة = ٢ π نق

② قياس $\frac{١}{٢}$ الدائرة = ١٨٠° بينما طول نصف الدائرة = π نق

مثال: في الشكل المقابل: دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٢١ سم

ق($\angle$ أ م ب) = ١٢٠° أوجد: طول $\overset{\frown}{أب}$ ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)



الحل

ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\angle$ أ م ب) = ١٢٠°

طول $\overset{\frown}{أب}$ = $\frac{ق(\overset{\frown}{أب})}{٣٦٠} \times ٢\pi$ نق = $\frac{١٢٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢١ = ٤٤$ سم

إذا كان $\overline{أب}$ قطر في الدائرة

$\therefore$ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١٨٠°

أضف إلى قاموسك

١١٧

نتائج هامة:

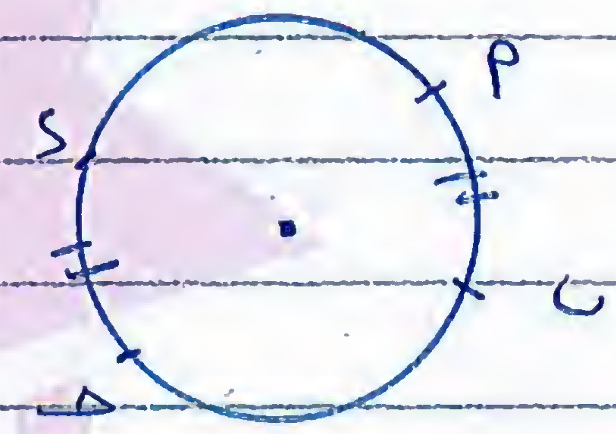
① في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول، والعكس صحيح.

② في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول، والعكس صحيح.

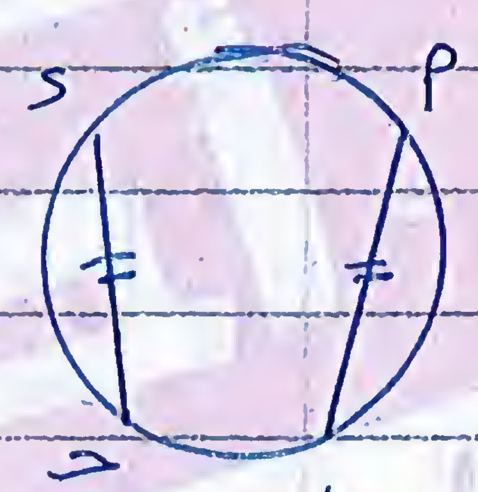
③ الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس

④ القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه متساويان في القياس

نتيجة ① | نتيجة ② | نتيجة ③ | نتيجة ④

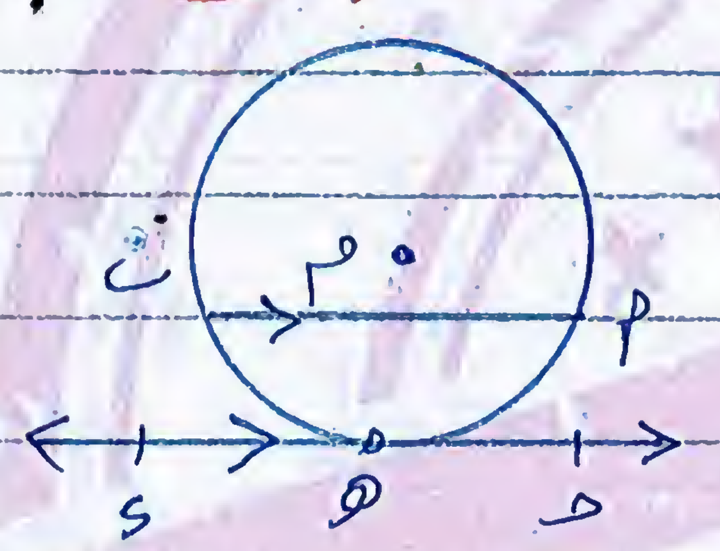


إذا كان ق(أب) = ق(جـد) فإن طول أب = طول جـد والعكس صحيح



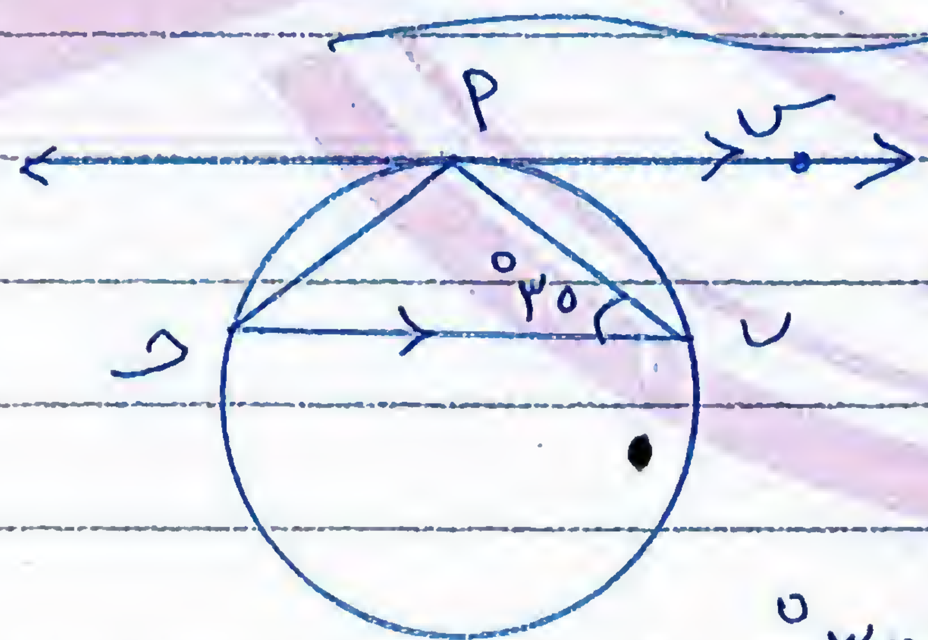
إذا كان ق(أب) = ق(جـد) فإن أب = جـد والعكس صحيح

إذا كان أب // جـد فإن ق(أجـ) = ق(بد)



إذا كان أب // جـد فإن ق(أهـ) = ق(ب هـ)

مثال: في الشكل المقابل: أس مماس للدائرة عند أ الوتر ب جـ // أس ، ق(∠ث) = ٣٠° أوجد: ق(∠ب أ جـ)



الحل: ∵ أس // ب جـ

∴ ق(أب) = ق(أجـ) ∴ أب = أجـ

في Δ أ ب جـ ∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ث) = ق(∠جـ) = ٣٠°

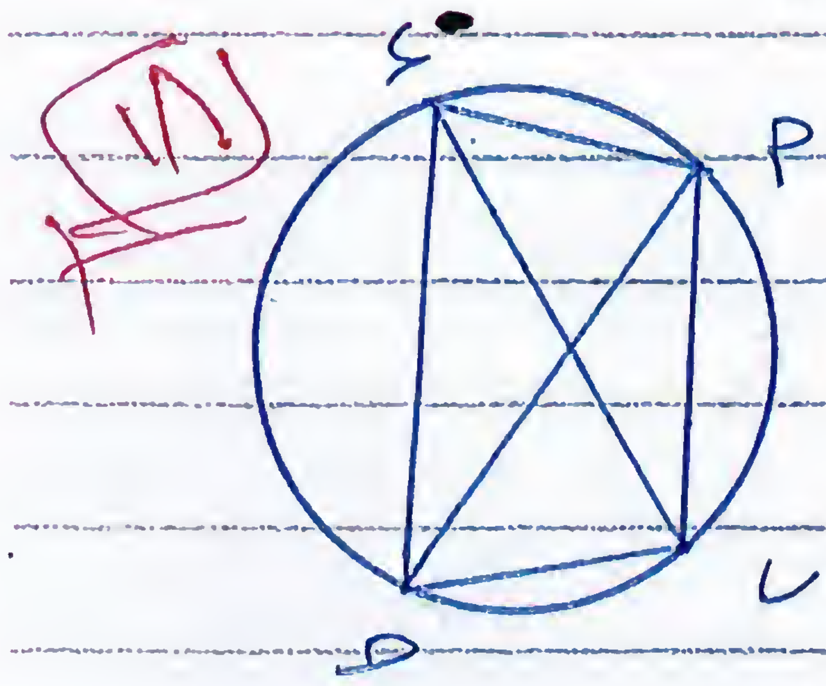
∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°

أضف إلى قاموسك:

قياس قوس = قياس قوس ⟸ وتر = وتر

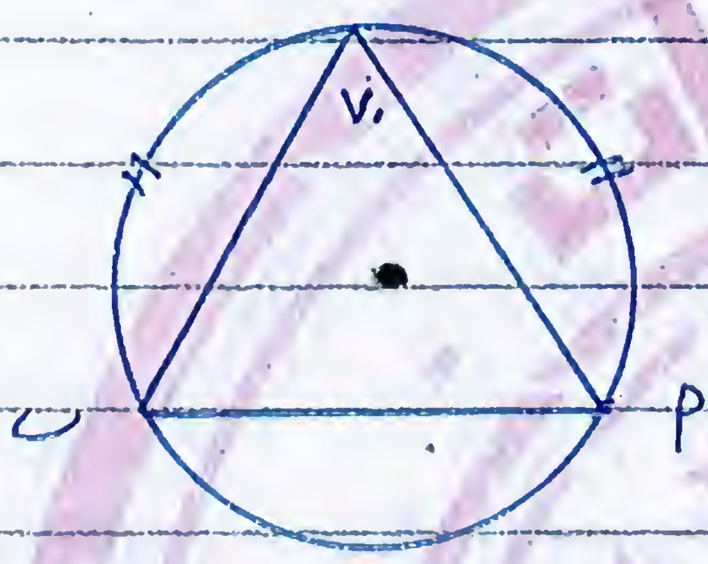
وتر // وتر ⟸ قياس قوس = قياس قوس

مماس // وتر ⟸ قياس قوس = قياس قوس



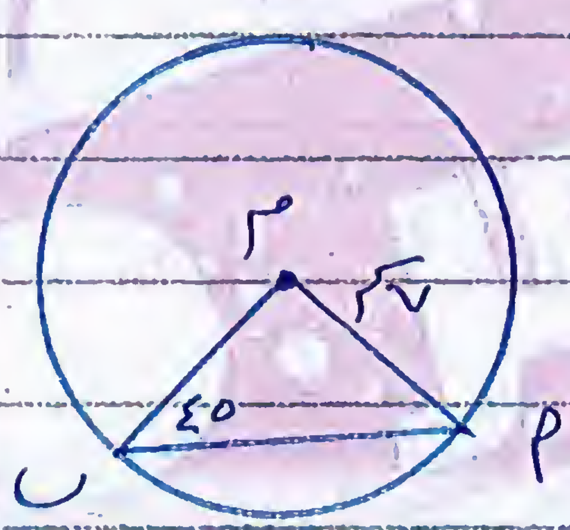
مثال: في الشكل المقابل: أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة بحيث: أ جـ = ب د
فأثبت أن: أ د = ب جـ

الحل: ∵ أ جـ = ب د "وتر = وتر"
∴ ق(أب⌒جـ) = ق(ب أ⌒د) "قوس = قوس"
بطرح ق(أ⌒ب) من الطرفين
∴ ق(أ⌒د) = ق(ب⌒جـ) ∴ أ د = ب جـ



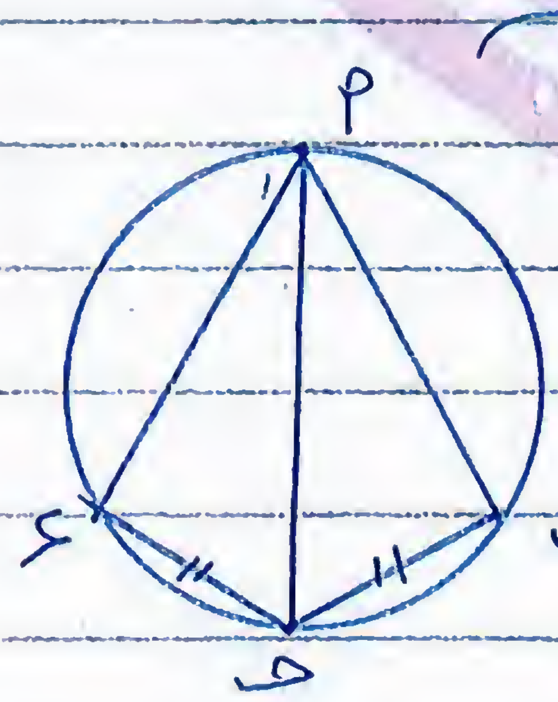
في الشكل المقابل: إذا كان: ق(أ⌒جـ) = ق(ب⌒جـ)، ق(∠أ جـ ب) = 70° أوجد: ق(∠أ ب جـ)

الحل: ∵ ق(أ⌒جـ) = ق(ب⌒جـ) ∴ أ جـ = ب جـ
في △ أ ب جـ ∵ أ جـ = ب جـ "ضلع = ضلع"
∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = $\frac{180 - 70}{2} = \frac{110}{2} = 55°$



في الشكل المقابل: ق(∠م ب أ) = 45°، م ب = 7 سم
أوجد: طول أ⌒ب (اعتبر $\pi \simeq \frac{22}{7}$)

الحل: في △ م أ ب
∵ م أ = م ب = نق ∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = 45°
∴ ق(∠أ م ب) = 180 − (45° + 45°) = 90°
∴ ق(أ⌒ب) = ق(∠أ م ب) = 90°
∴ طول أ⌒ب = $\frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi$ نق $= \frac{90}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 11$ سم



في الشكل المقابل: أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م، أ جـ قطر في الدائرة، جـ ب = جـ د
أثبت أن: ق(أ⌒ب) = ق(أ⌒د)

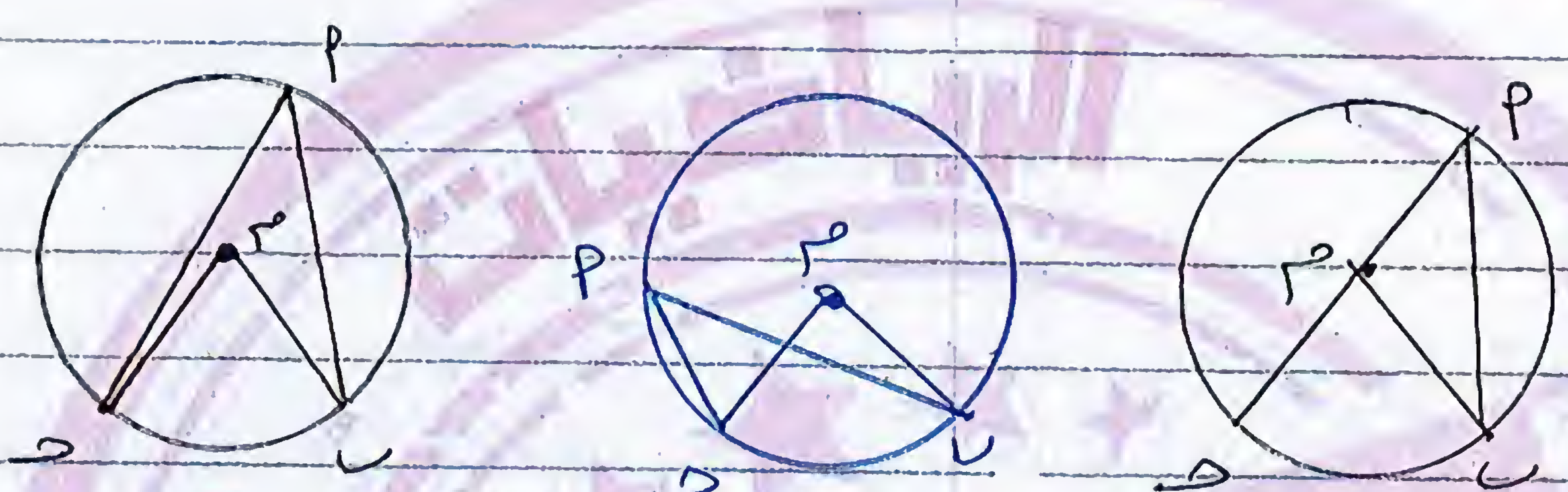
الحل: ∵ أ جـ قطر في الدائرة م ∴ ق(أب⌒جـ) = ق(أد⌒جـ) ...(1)
∵ ب جـ = جـ د ∴ ق(ب⌒جـ) = ق(جـ⌒د) ...(2)
بطرح (2) من (1) ∴ ق(أ⌒ب) = ق(أ⌒د) #

الزاوية المحيطية

١٩

الزاوية المحيطية: "هي الزاوية التي رأسها على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترًا في هذه الدائرة"

نظرية (١): "قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس"

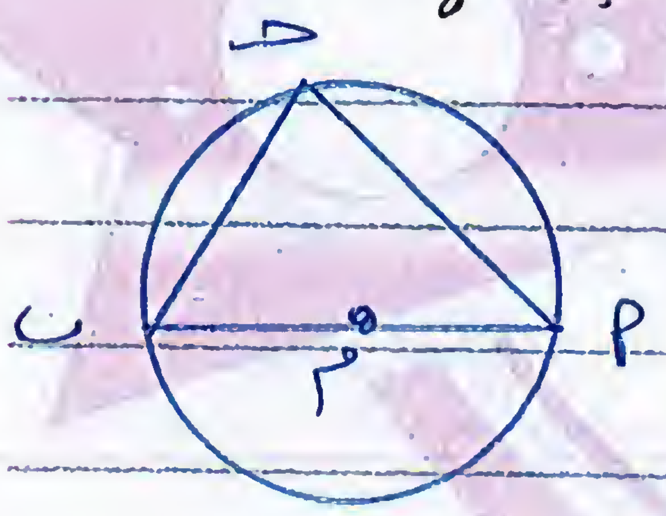


في كل من الأشكال السابقة ∠ ب أ جـ محيطية ، ∠ ب م جـ مركزية

فيكون ق(∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م جـ)

أو ق(∠ ب م جـ) = ٢ ق(∠ ب أ جـ)

نتيجة (١) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها

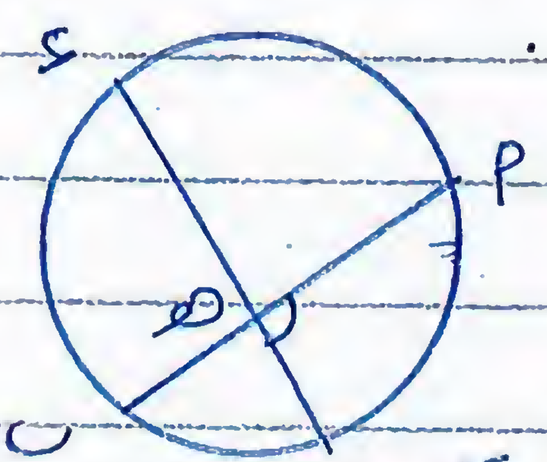


نتيجة (٢) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

في الشكل المقابل: إذا كان أب قطر في الدائرة م

فإن ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠°

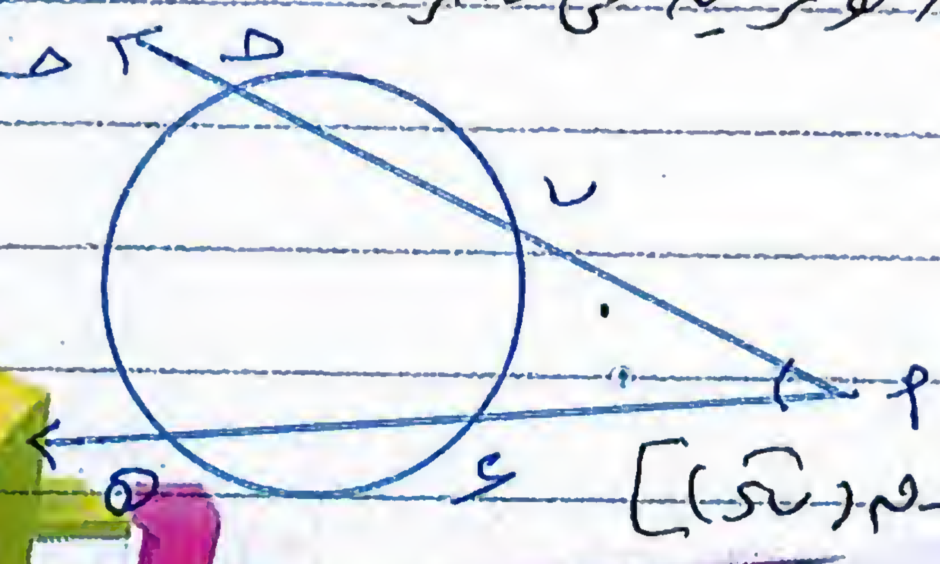
تمرين مشهور (١) إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.



من الشكل المقابل:

ق(∠ أ هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(أ جـ) + ق(ب ء)]

تمرين مشهور (٤) "إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف قياس القوس الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصران هذه الزاوية"



ق(∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(هـ جـ) − ق(ب ء)]

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

نظرية (٤) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس

نتيجة الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية في القياس في الدائرة الواحدة (أو في عدة دوائر) تكون متساوية في القياس

عكس النتيجة الزوايا المحيطية المتساوية في القياس في الدائرة الواحدة (أو في عدة دوائر) تحصر بين ضلعيها أقواساً متساوية في القياس

عكس نظرية (٤) الشكل الرباعي الدائري

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

ملاحظات هامة:

① إذا وجدت زاويتان مرسومتان على ضلع من أضلاع شكل رباعي وفي جهة واحدة من هذا الضلع وكانتا غير متساويتين في القياس فإن الشكل لا يكون رباعياً دائرياً.

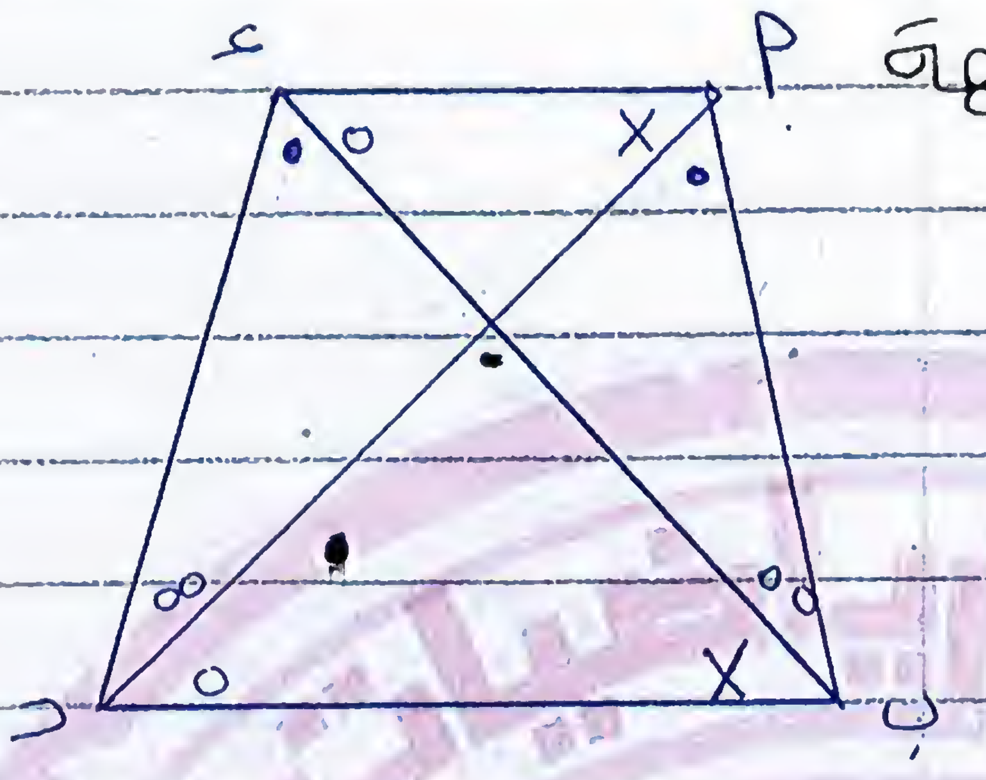
② المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوي الساقين أشكال رباعية دائرية بينما متوازي الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير المتساوي الساقين ليست أشكالاً رباعية دائرية.

(1)

الشكل الرباعي الدائري

إذا كان أ ب جـ د رباعي دائري فإن

١- كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها تكونان متساويتان في القياس



أي

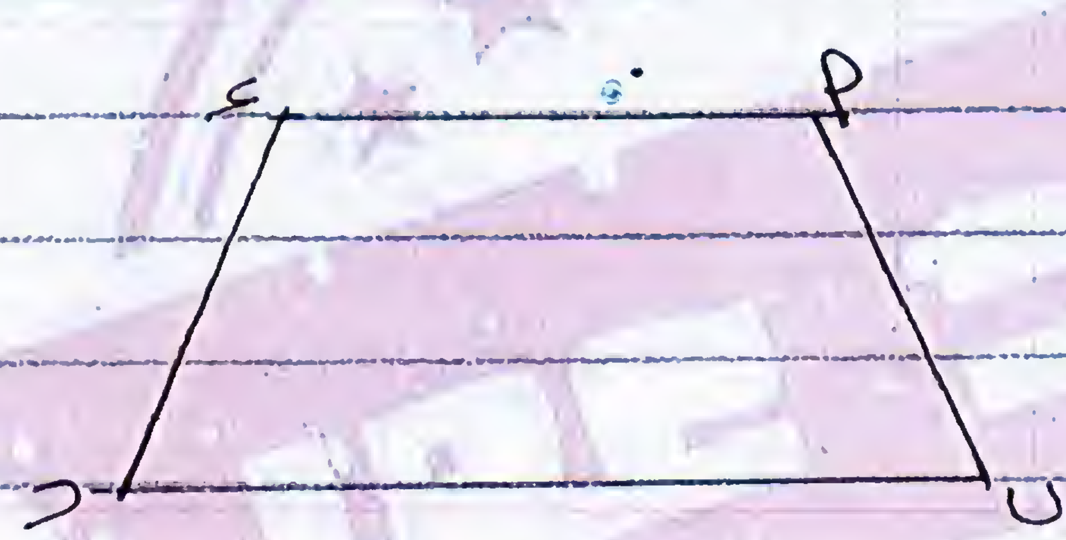
ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ)

مرسومتان على ب جـ

وفي جهة واحدة منها

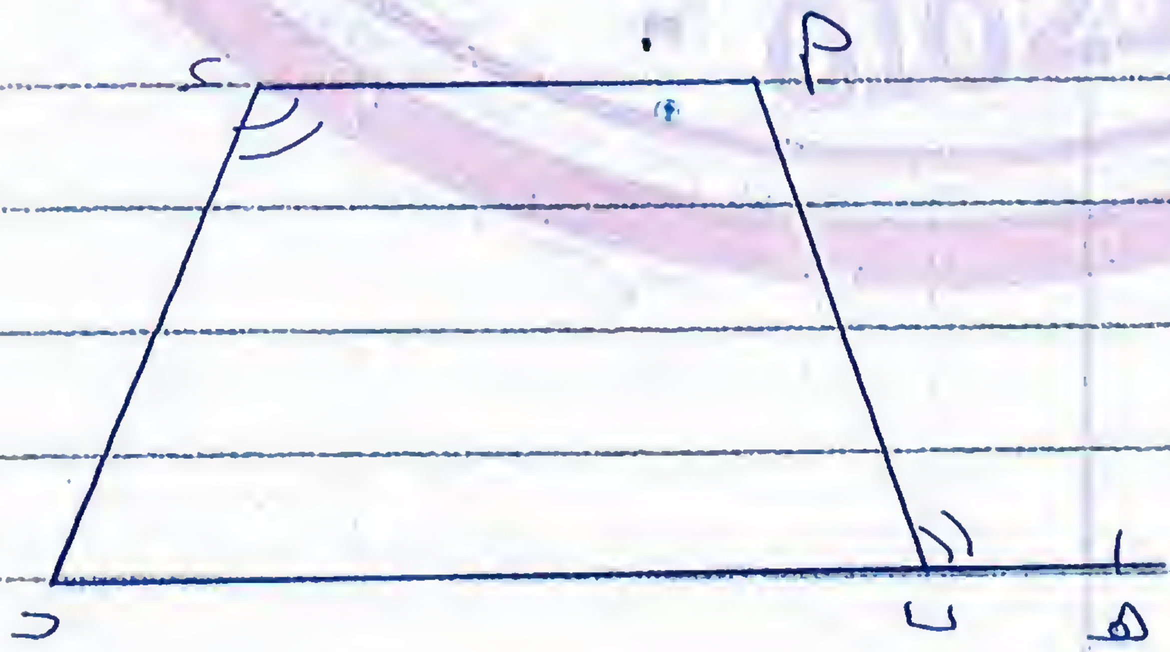
٢- كل زاويتين متقابلتين فيه تكونان متكاملتان

$ق(\hat{أ}) + ق(\hat{جـ}) = 180°$



$ق(\hat{ب}) + ق(\hat{د}) = 180°$

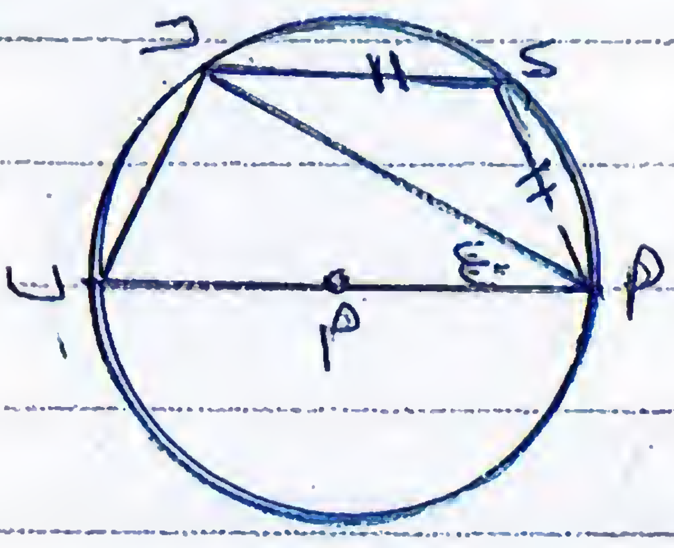
٣- قياس الزاوية الخارجة = قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



ق(∠أ ب هـ) = ق(د)

الشكل الرباعي الدائري

① في الشكل المقابل:



أ ب جـ د رباعي مرسوم داخل دائرة م ،

ق(∠جـ أ ب) = ٤٠° ، د أ = د جـ

أوجد:

١- ق(∠د)   ٢- ق(∠د أ جـ)

الحل

∵ أ ب قطر في الدائرة م ، ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

في △ أ ب جـ القائم في جـ

∴ ق(∠ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

∵ أ ب جـ د رباعي دائري   (رءوس الأربعة تقع على الدائرة)

∴ ق(∠ب) + ق(∠د) = ١٨٠°

∴ ق(∠د) = ١٨٠ − ٥٠ = ١٣٠°

في △ أ د جـ   ∵ أ د = د جـ

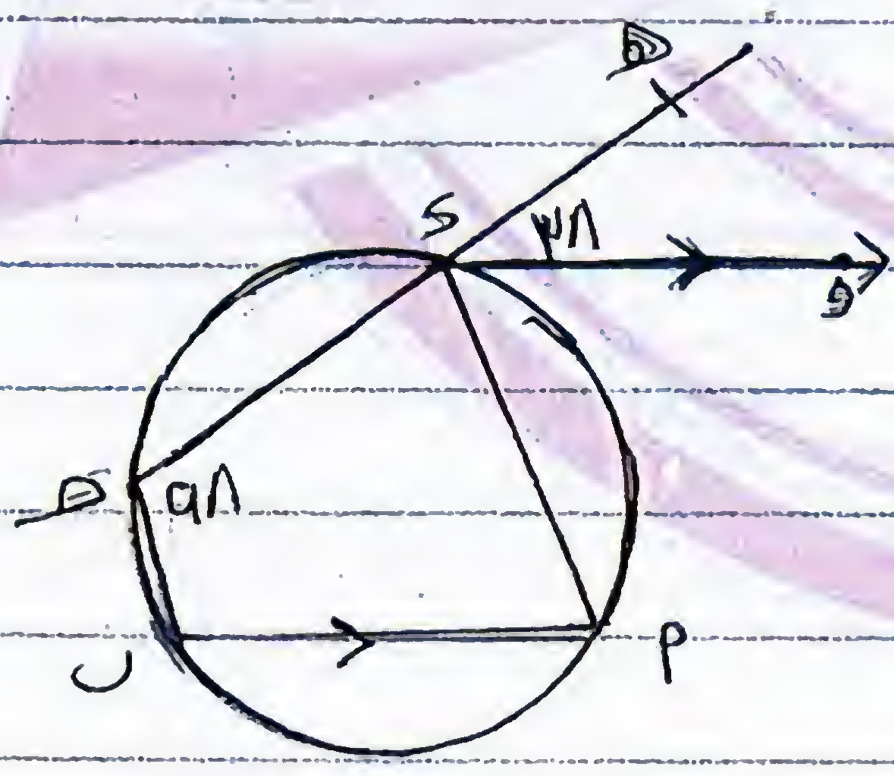
∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠د جـ أ) = $\frac{١٨٠ - ١٣٠}{٢} = \frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥°

٢- في الشكل المقابل:

أ ب جـ د شكل رباعي دائري مرسوم داخل دائرة ، د و // ب أ

ق(∠د جـ ب) = ٩٨° ، ق(∠هـ د و) = ٣٨°

أوجد: ق(∠ب)



الحل

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠جـ) + ق(∠أ) = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − ٩٨ = ٨٢°

∵ و د // أ ب ، أ د قاطع لهما

∴ ق(∠و د أ) = ق(∠أ) = ٨٢ بالتبادل

∴ ق(∠أ د هـ) = ٣٨ + ٨٢ = ١٢٠°

∵ ∠هـ د أ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ د

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ د أ) = ١٢٠°

الشكل الرباعي الدائري

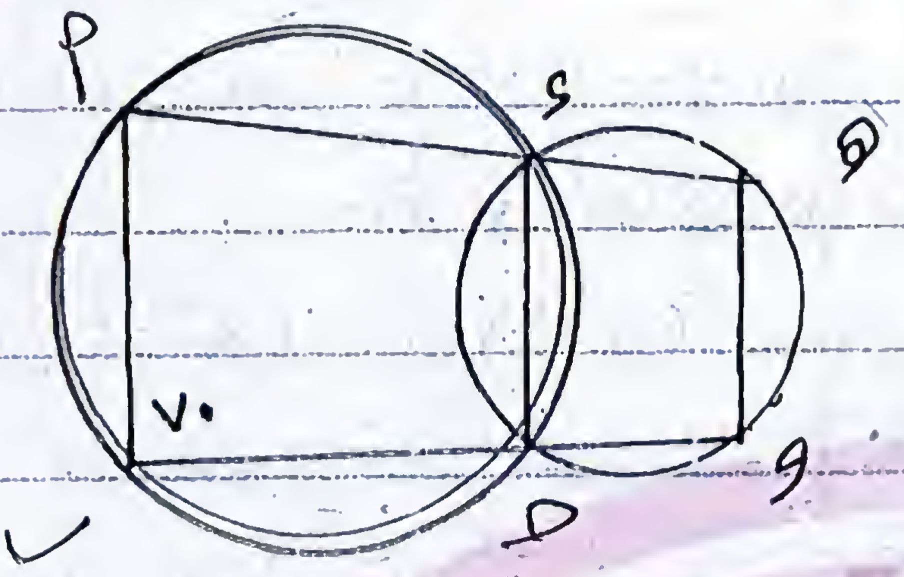
٣- في الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متقاطعتان في د ، ء

ق(ب̂) = ٧٠°

أوجد : ق(و̂)

اثبت : أن هـ و // أ ب



الحل

∵ أ ب د ء رباعي دائري

∴ ق(هـ ء̂ د) = ق(ب̂) = ٧٠°   خارجة عن الرباعي الدائري

∵ الشكل هـ و د ء رباعي دائري

∴ ق(و̂) + ق(هـ ء̂ د) = ١٨٠   متقابلتان

∴ ق(و̂) = ١٨٠ - ٧٠ = ١١٠°   (أولاً)

∴ ق(و̂) + ق(ب) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠ وهما في وضع تداخل

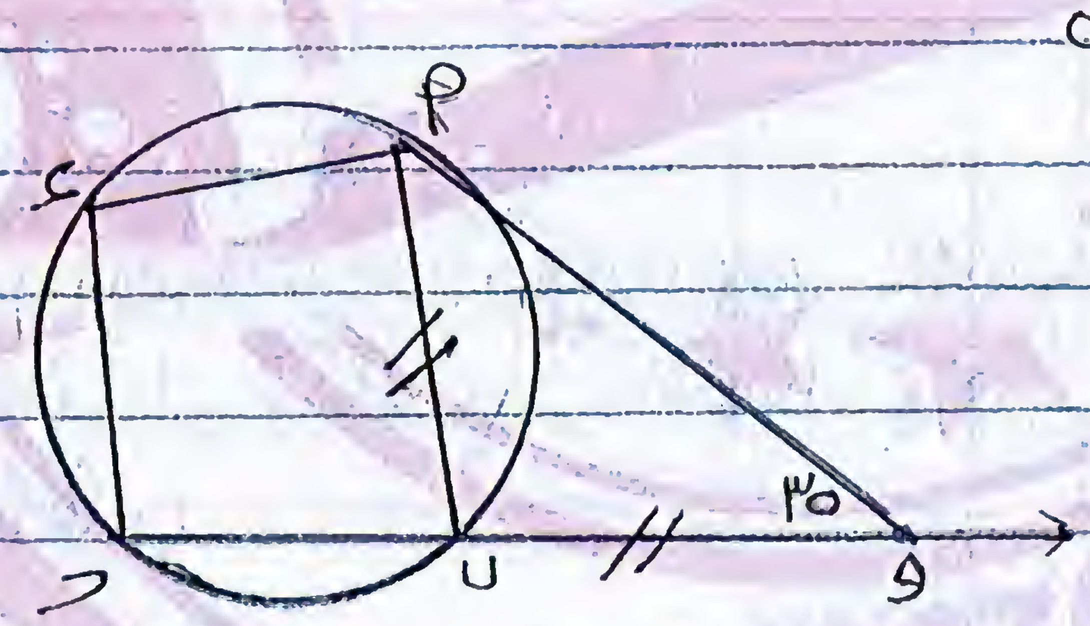
∴ هـ و // أ ب   (ثانياً)

٤- في الشكل المقابل :

أ ب د ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

ب و = ب أ ، ق(ب و̂ أ) = ٣٥°

أوجد : ق(ء̂)



الحل

في △ أ ب و

∵ أ ب = ب و

∴ ق(أ و̂ ب) = ق(ب أ̂ و) = ٣٥°

∴ ق(أ ب̂ و) = ١٨٠ - (٣٥ + ٣٥) = ١٨٠ - ٧٠ = ١١٠°

∵ ∠ أ ب و خارجة عن الرباعي الدائري أ ب د ء

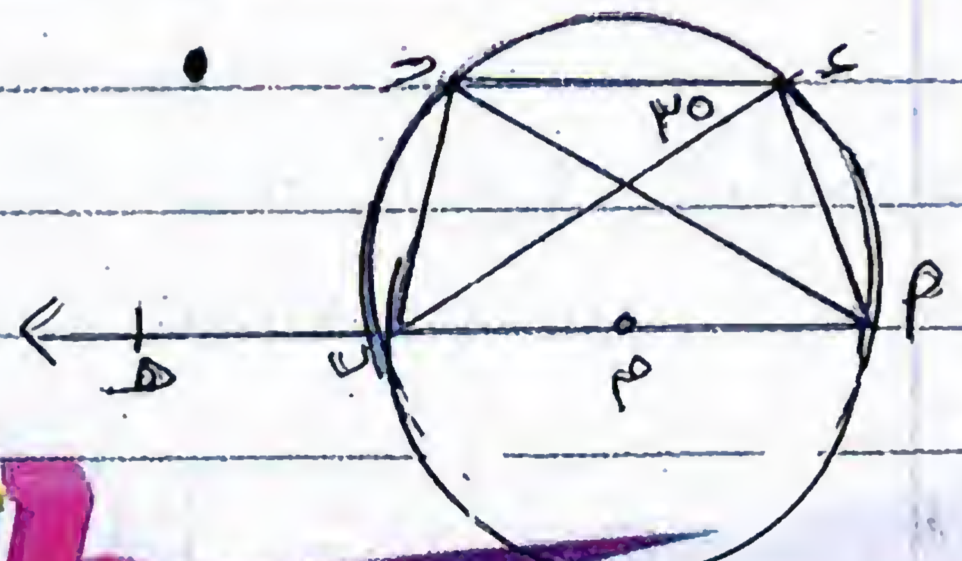
∴ ق(أ ب̂ و) = ق(ء̂) = ١١٠°

٥- في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م ، ق(ب ء̂ د) = ٣٥°

أوجد ١- ق(أ ء̂ ب)

٢- ق(د أ̂ ب)   ٣- ق(د ب̂ هـ)



(٤)

٢٤

الحل

∵ أب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أجـب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة (أولاً)

ق(∠دأب) = ق(∠دجـب) = ٣٥ محيطيتان تحصران دب (ثانياً)

∵ ∠دبهـ خارجة عن الشكل أبجـد الرباعي الدائري

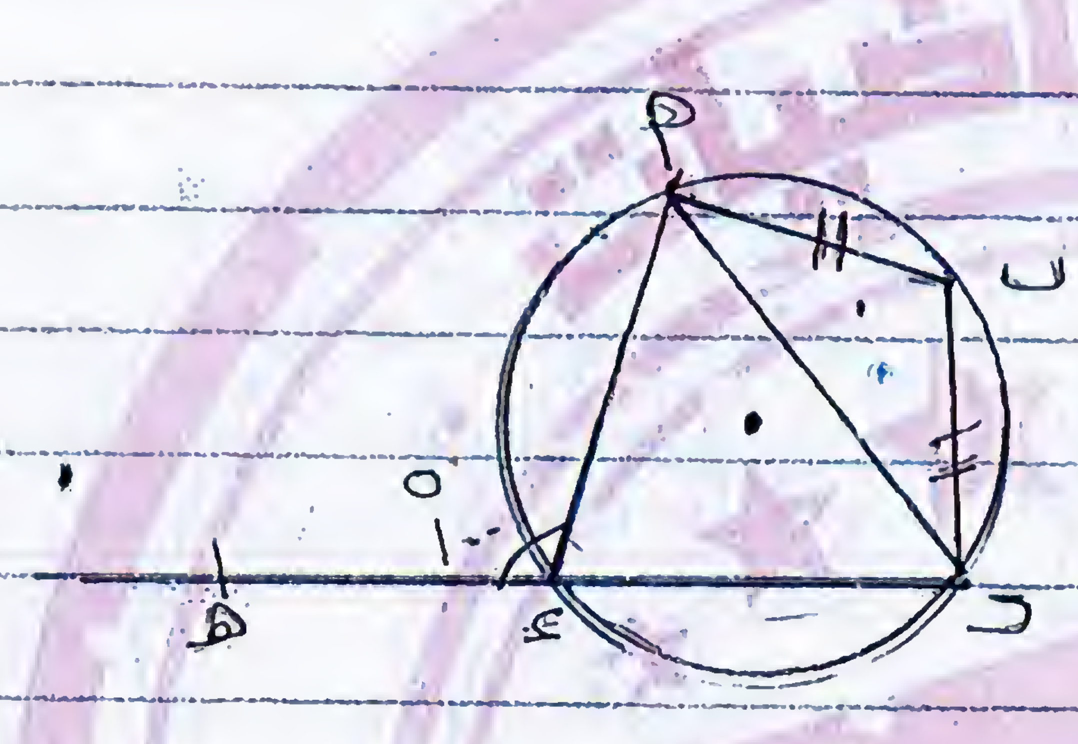
∴ ق(∠دبهـ) = ق(∠أجـد) = ٩٠ + ٣٥ = ١٢٥° (ثالثاً)

٦- في الشكل المقابل

أبجـد رباعي دائري، هـ ∈ $\overrightarrow{جد}$، ق(∠أدهـ) = ١٠٠°

أب = بجـ

أوجد: ق(∠بأجـ)



الحل

∵ ∠أدهـ خارجة عن الرباعي الدائري أبجـد

∴ ق(∠ب) = ق(∠أدهـ) = ١٠٠°

في △أبجـ

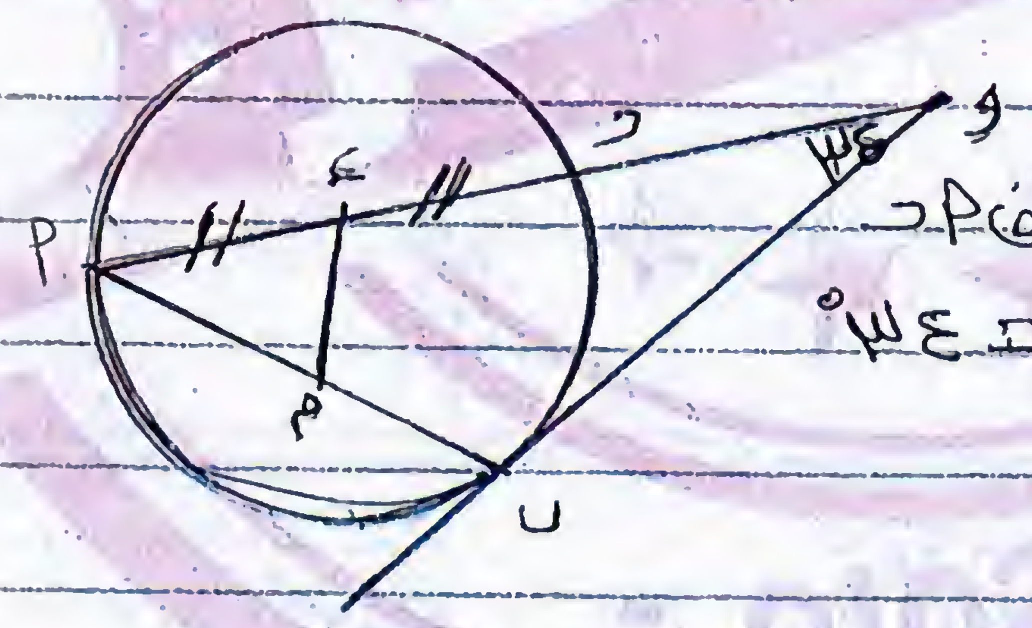
∵ أب = بجـ ∴ ق(∠بأجـ) = ق(∠بجـأ) = $\frac{١٨٠ - ١٠٠}{٢}$ = $\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠°

٧- في الشكل المقابل:

أب قطر في الدائرة م، أجـ وتر فيها، د منتصف أجـ

بو مماسة تقطع $\overrightarrow{أجـ}$ في و، فإذا كان ق(∠و) = ٣٤°

أوجد: ق(∠أمد)



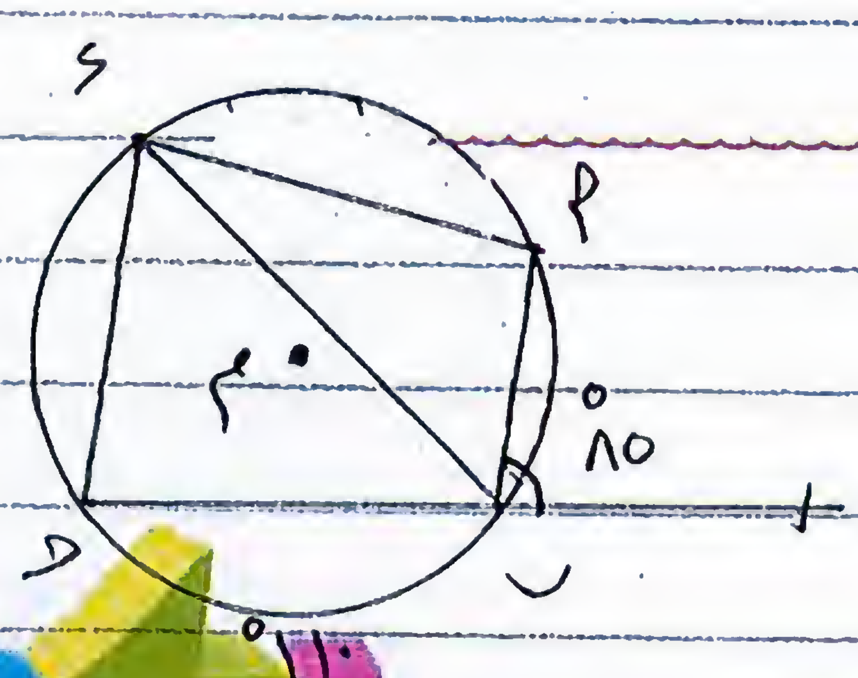
الحل

∵ د منتصف أجـ ∴ مد ⊥ أجـ ، ∵ بو مماسة للدائرة عند ب ∴ وب ⊥ مب

∴ ق(∠مدو) + ق(∠مبو) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل وبمد رباعي دائري ، ∵ ∠أمد خارجة عن الرباعي الدائري

∴ ق(∠أمد) = ق(∠و) = ٣٤°



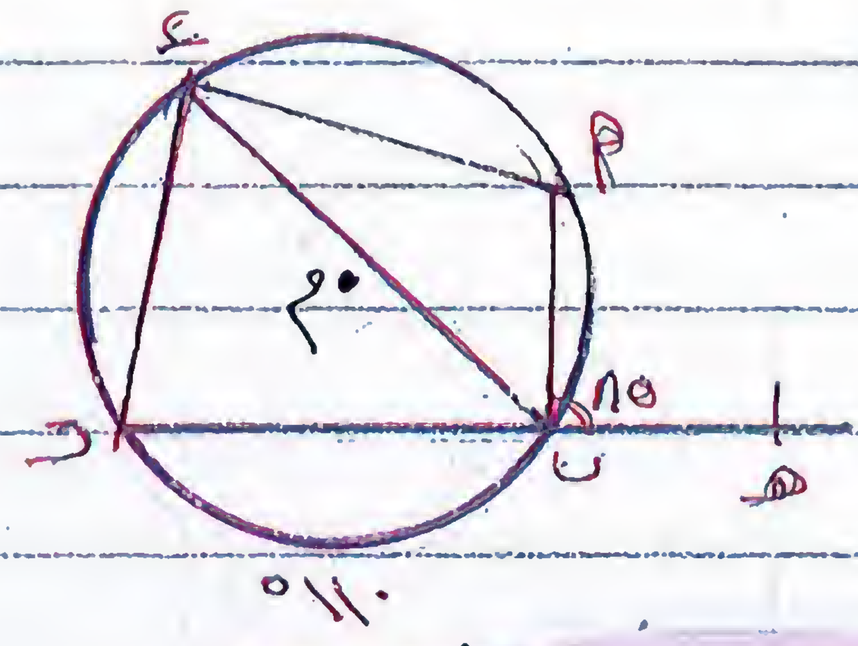
٨- في الشكل المقابل:

إذا كان أ، ب، جـ، د تقع على دائرة مركزها م

ق(∠جـ) = ١١٠°، ق(∠أبهـ) = ٨٥°

أوجد: ق(∠أدب)

الحل



∵ أ ب جـ ء رباعي دائري، جـ ب هـ خارجة عنه

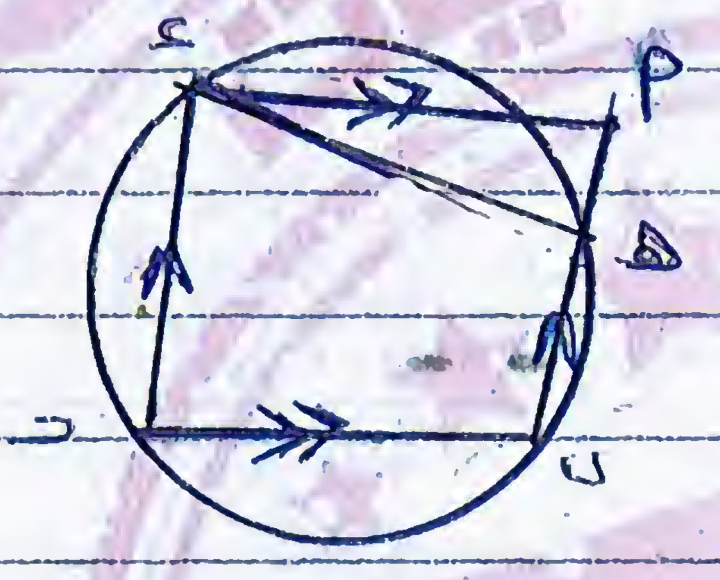
∴ ق(∠ أ ء جـ) = ق(∠ أ ب هـ) = ٨٥

∵ ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ١١٠°

∴ ق(∠ ب ء جـ) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥ محيطية تحصران $\overset{\frown}{ب جـ}$

∴ ق(∠ أ ء ب) = ٨٥ − ٥٥ = ٣٠°

٩- في الشكل المقابل:



أ ب جـ ء متوازي أضلاع الدائرة المارة بالنقط

ب، جـ، ء وتقطع أ ب في هـ

أثبت أن: أ ء = هـ ء

الحل

∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) ——— ①

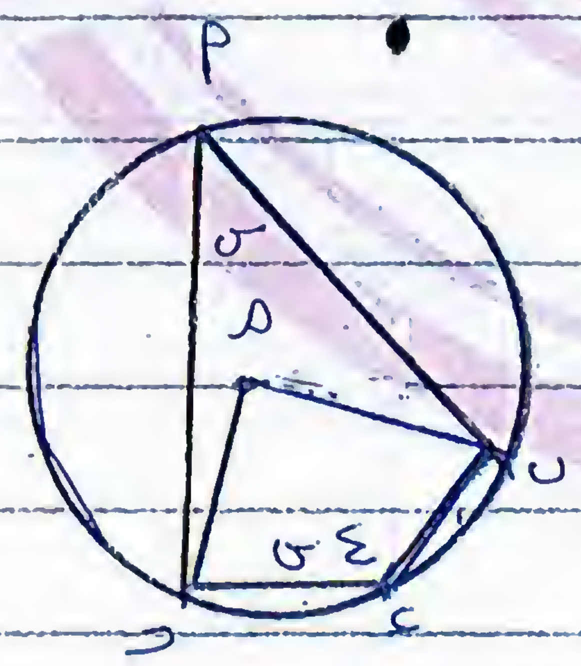
∵ ∠ ء هـ أ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري هـ ب جـ ء

∴ ق(∠ أ هـ ء) = ق(∠جـ) ——— ②

من ١، ٢ ∴ ق(∠أ) = ق(∠ ء هـ أ)

في △ أ هـ ء ∵ ق(∠أ) = ق(∠ ء هـ أ) ∴ أ ء = هـ ء

١٠- في الشكل المقابل:



إذا كان م مركز الدائرة فأوجد

١- قيمة س بالدرجات ٢- ق(∠ ب م جـ)

الحل

∵ أ ب جـ ء رباعي دائري ∴ ق(∠أ) + ق(∠ء) = ١٨٠°

∴ س + ٤س = ١٨٠°

∴ ٥س = ١٨٠ ∴ س = $\frac{١٨٠}{٥}$ = ٣٦°

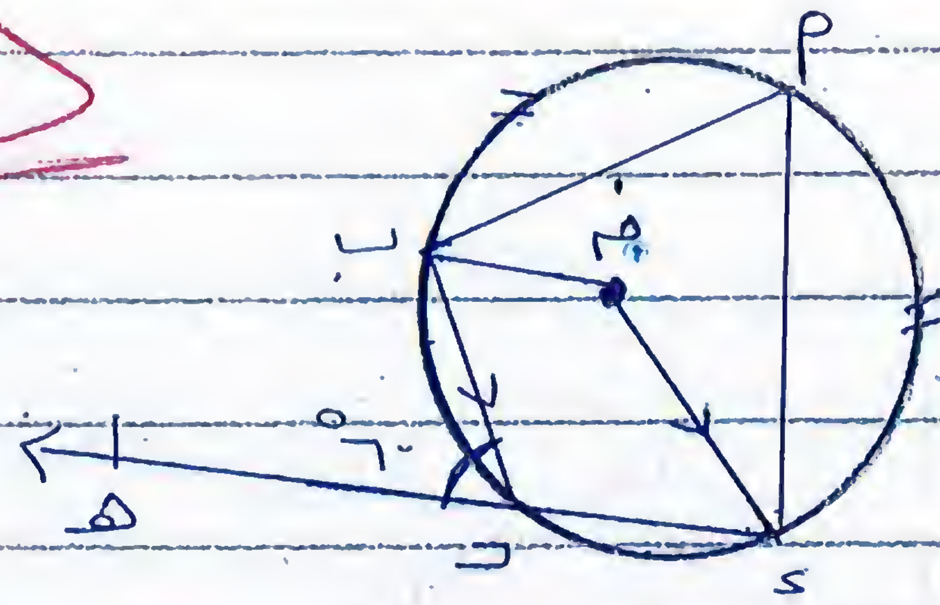
∴ ق(∠أ) = ٣٦°

∴ ق(∠ ب م جـ) = ٢ق(∠أ) = ٢×٣٦ = ٧٢°

مركزية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{ب جـ}$

(٦)

١١ - في الشكل المقابل :



دائرة م ، ق (ب جـ^ هـ) = ٦٠°

ب جـ // م ء ، م منتصف أ ء

اثبت ان : ١- الشكل ب م ء جـ معين

٢- أ جـ قطر في الدائرة

الحل

∵ د ب جـ هـ خارجة عن الرباعي الدائري أ ء جـ ب

∴ ق(أ^) = ق(ب جـ^ هـ) = ٦٠°

∴ ق(ء م^ ب) = ٢ق(أ^) = ١٢٠° مركزية ومحيطية تحصران ب ء

∵ ب جـ // م ء ← ①

∴ ق(م ء^ جـ) = ق(ب جـ^ هـ) = ٦٠° بالتناظر

∴ ق(ء م^ ب) + ق(م ء^ جـ) = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠ وهما في وضع تداخل

∴ م ب // ء جـ ← ②

من ١ ، ٢ ∴ الشكل م ء جـ ب متوازي اضلاع

∵ م ء = م ب = نق ∴ الشكل م ء جـ ب معين

∵ الشكل م ء جـ ب معين

∴ ء جـ = جـ ب وتر = وتر

∴ ق(ء جـ⌒) = ق(جـ ب⌒) ← ③

∵ ق(أ ء⌒) = ق(أ ب⌒) ← ④

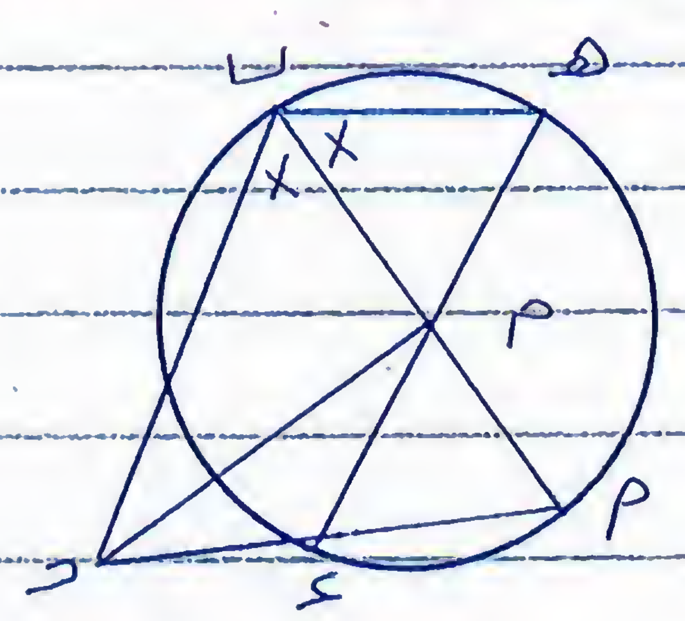
بجمع ٣ ، ٤

∴ ق(أ ء⌒) + ق(ء جـ⌒) = ق(أ ب⌒) + ق(جـ ب⌒)

∴ ق(أ ء جـ⌒) = ق(أ ب جـ⌒) = ٣٦٠ / ٢ = ١٨٠°

∴ أ جـ قطر في الدائرة

١٢- في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م ، جـ ∈ أ ء

ب أ ينصف ∠ هـ ب جـ ، ء م يقطع الدائرة في هـ

اثبت ان : ١- الشكل م ب جـ ء رباعي دائري

٢- جـ م ⊥ أ ب

الحل

∵ ب أ ينصف ∠ هـ ب د

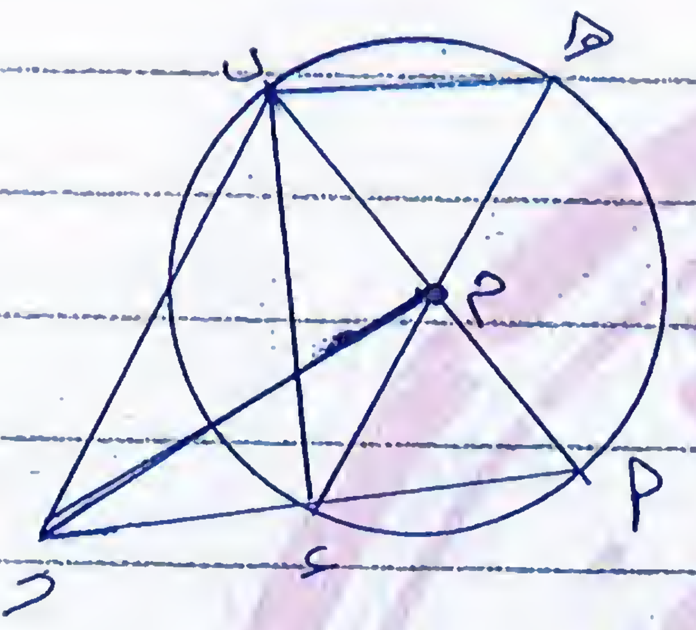
∴ ق(∠هـ ب أ) = ق(∠أ ب د) ... ①

∵ ق(∠هـ ب أ) = ق(∠هـ ع أ) محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{هـ أ}$ ... ②

من ①، ② ∴ ق(∠أ ع هـ) = ق(∠أ ب د)

وهي خارجة عن الشكل أ ب د ع

∴ الشكل أ ب د ع رباعي دائري أولاً



العمل:

نرسم $\overline{ب ع}$

∵ أ ب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ ع ب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ ق(∠ب ع د) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°

∵ م ب د ع رباعي دائري

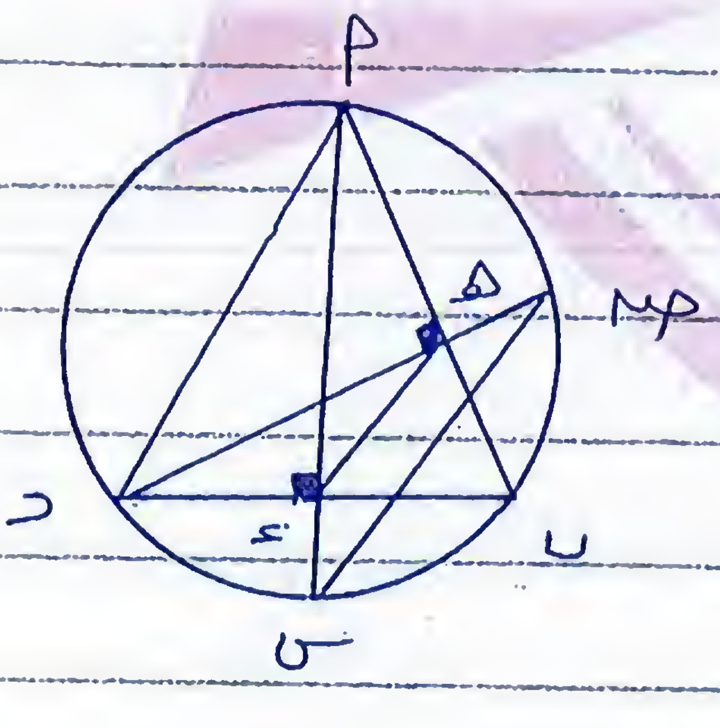
∴ ق(∠ب م د) = ق(∠ب ع د) = ٩٠°

∴ $\overline{د م}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

١٣- في الشكل المقابل:

$\overline{أ س}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ص}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

أثبت أن: $\overline{س ص}$ // $\overline{ع هـ}$



الحل

∵ $\overline{أ س}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ ق(∠أ ع جـ) = ٩٠° ... ①

∵ $\overline{جـ ص}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ∴ ق(∠أ هـ جـ) = ٩٠° ... ②

من ①، ② ∴ ق(∠أ هـ جـ) = ق(∠أ ع جـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على أ جـ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ هـ ع جـ رباعي دائري

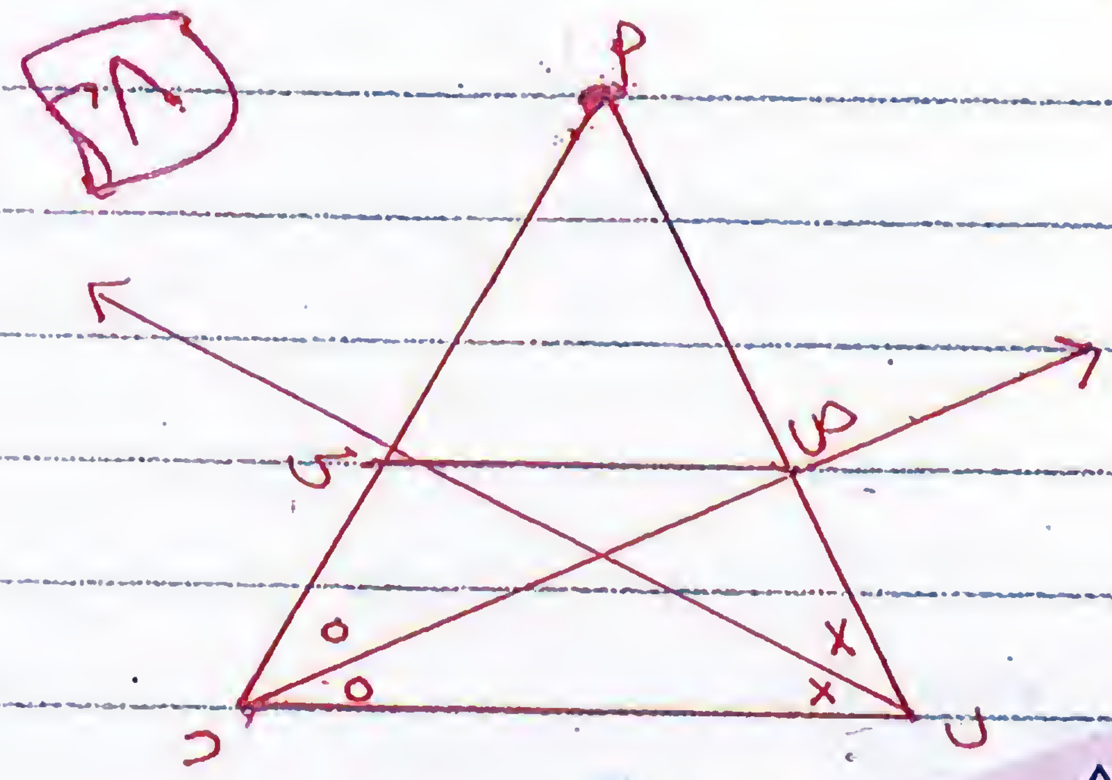
∴ ق(∠ع هـ جـ) = ق(∠ع أ جـ) ... ③

∵ ق(∠س ص جـ) = ق(∠س أ جـ) ... ④ محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{س جـ}$

من ③، ④ ∴ ق(∠ع هـ جـ) = ق(∠س ص جـ)

وهما في وضع تناظر ∴ $\overline{س ص}$ // $\overline{ع هـ}$

(٢٨)



١٤- في الشكل المقابل :

أب = أجـ ، $\overleftrightarrow{ب س}$ ينصف ∠ب ويقطع $\overline{أجـ}$ في س ،

$\overleftrightarrow{جـ ص}$ ينصف ∠جـ ويقطع $\overline{أب}$ في ص

اثبت أن : ١- ب جـ س ص رباعي دائري

٢- $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

الحل

∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ---- ①

∵ $\overleftrightarrow{ب س}$ ينصف ∠ب ∴ ق(∠ص ب س) = ق(∠س ب جـ) ---- ②

∵ $\overleftrightarrow{جـ ص}$ ينصف ∠جـ ∴ ق(∠س جـ ص) = ق(∠ص جـ ب) ---- ③

من ١ ، ٢ ، ٣ ∴ ق(∠ص ب س) = ق(∠ص جـ س)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ب جـ س ص رباعي دائري

∵ ∠أ ص س خارجة عن الرباعي الدائري

∴ ق(∠أ ص س) = ق(∠جـ) ---- ④

من ①، ④ ∴ ق(∠أ ص س) = ق(∠ب) وهما في وضع تناظر

∴ $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

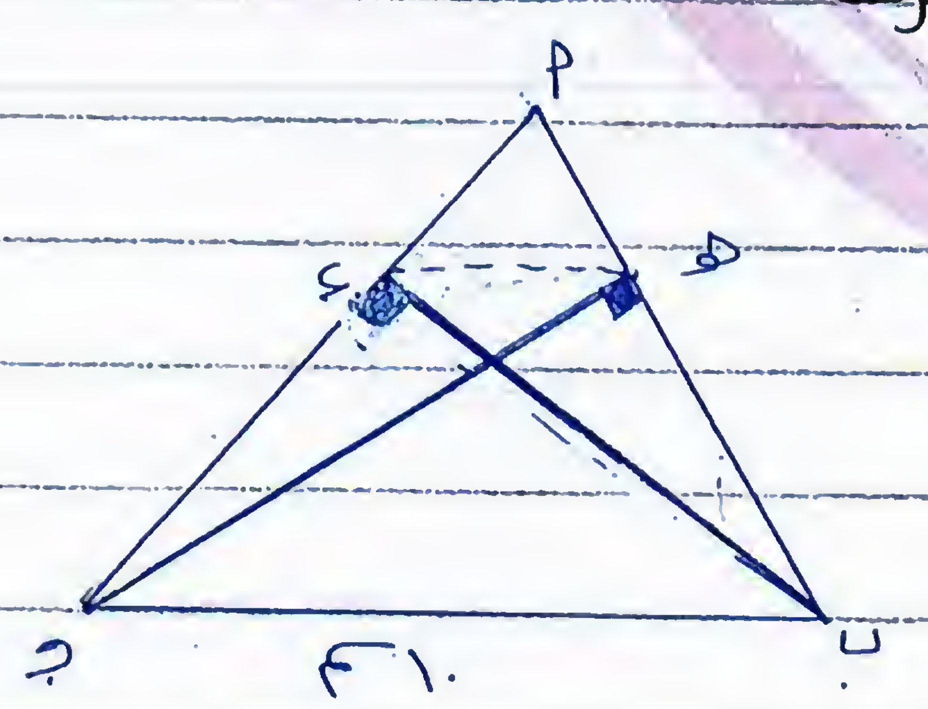
١٥- في الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث حاد الزوايا فيه : ب جـ = ١٠ سم ، رسم $\overleftrightarrow{ب ء}$ ⊥ أجـ فقطعها في ء ،

رسم $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ أب فقطعه في هـ اثبت أن

١- ب ، جـ ، ء ، هـ يمر بها دائرة واحدة واوجد طول نصف قطرها

٢- △ أب ء ∼ △ أجـ هـ



الحل

∵ ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠ب ء جـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على ب جـ وفي جهة واحدة منها

∴ ب جـ ء هـ رباعي دائري

∵ ق(∠ب هـ جـ) = ٩٠° ∴ ب جـ قطر في الدائرة

∴ نق = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ٥ سم (اولاً)

∵ هـ ب جـ ء رباعي دائري ∴ ق(∠هـ ب ء) = ق(∠هـ جـ ء)

∴ △△ أب ء ، أجـ هـ فيهما { ∠أ مشتركة ، ق(∠هـ ب ء) = ق(∠هـ جـ ء) ، ق(∠أ ء ب) = ق(∠أ هـ جـ) = ٩٠° }

∴ △ أب ء ∼ △ أجـ هـ

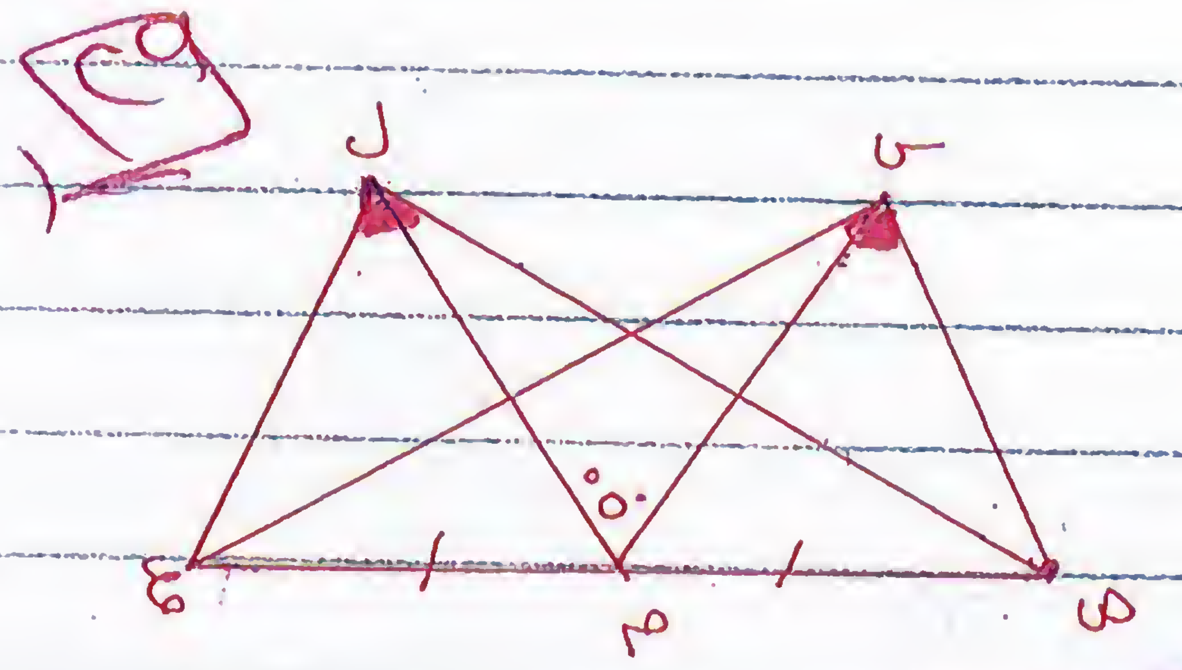
١٦- في الشكل المقابل:

م(∠ص سَ ع) = م(∠ص لَ ع) = ٩٠°

م منتصف صع ، م(∠س مَ ل) = ٥٠° أوجد

١- م(∠س ص ل)

٢- اثبت أن م(∠س ص ل) = م(∠س ع ل)



الحل

∵ م(∠ص سَ ع) = م(∠ص لَ ع) = ٩٠°

وهما مرسومتان على صع وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل س ص ع ل رباعي دائري

∵ م(∠ص س ع) = ٩٠° ∴ ∠ص س ع مرسومة في نصف دائرة

∴ صع قطر ، م مركز هذه الدائرة

∴ (∠س ص ل) = $\frac{1}{2}$ م(∠س م ل) = $\frac{50}{2}$ = ٢٥° محيطية ومركزية

∵ الشكل س ص ع ل رباعي دائري

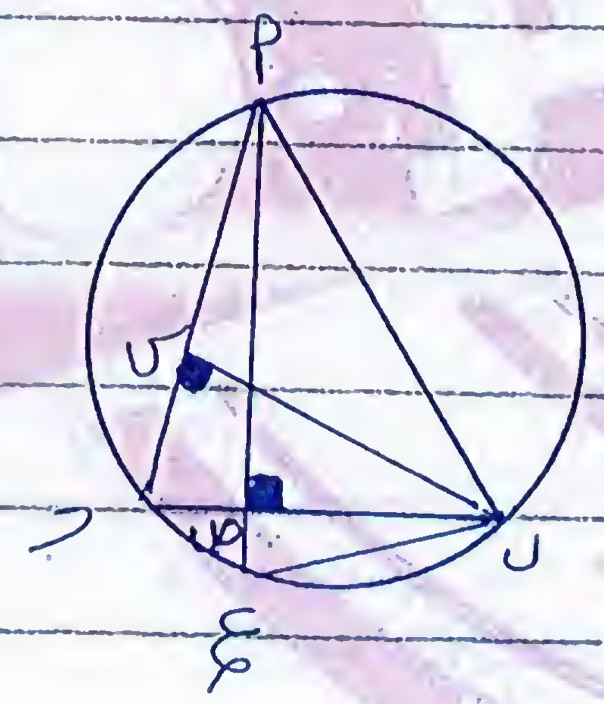
∴ م(∠س ص ل) = م(∠س ع ل)

١٧- في الشكل المقابل:

س ص ⊥ أ جـ ، أ هـ ⊥ ب جـ

اثبت أن ١- الشكل أ ب ص س رباعي دائري

٢- ب د ينصف ∠س ب ع



الحل

∵ م(∠أ سَ ب) = م(∠أ صَ ب) = ٩٠°

وهما مرسومتان على أ ب وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ص س رباعي دائري (أولاً)

∵ أ ب ص س رباعي دائري

∴ م(∠ص ب س) = م(∠ص أَ س) ---- ①

، ∵ م(∠ع بَ د) = م(∠ع أَ د) ---- ② محيطيتان تحصران ع د

من ١ ، ٢

∴ م(∠ع بَ د) = م(∠د بَ س)

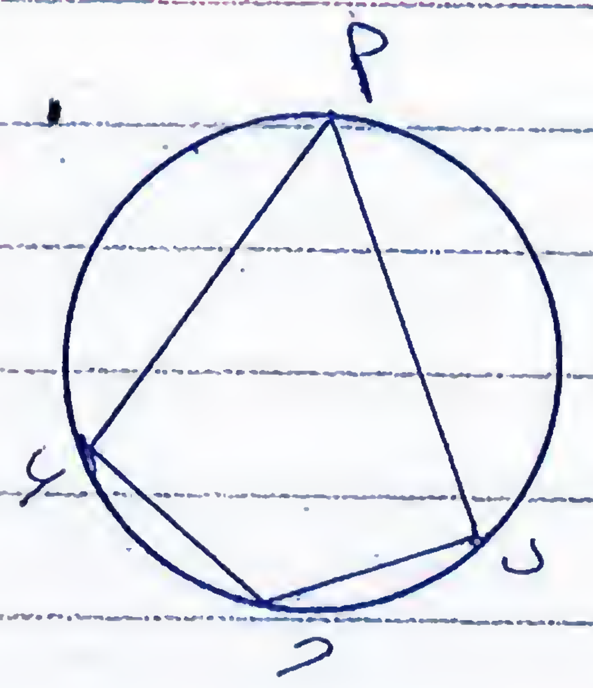
∴ ب د ينصف ∠س ب ع

#

(١)

٣٠

الشكل الرباعي الدائري



اثبت انه اذا كان الشكل الرباعي دائرياً فان كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان

المعطيات: أ ب جـ د شكل رباعي دائري

المطلوب: إثبات أن ق(∠أ) + ق(∠جـ) = 180° ، ق(∠ب) + ق(∠د) = 180°

الحل

البرهان:

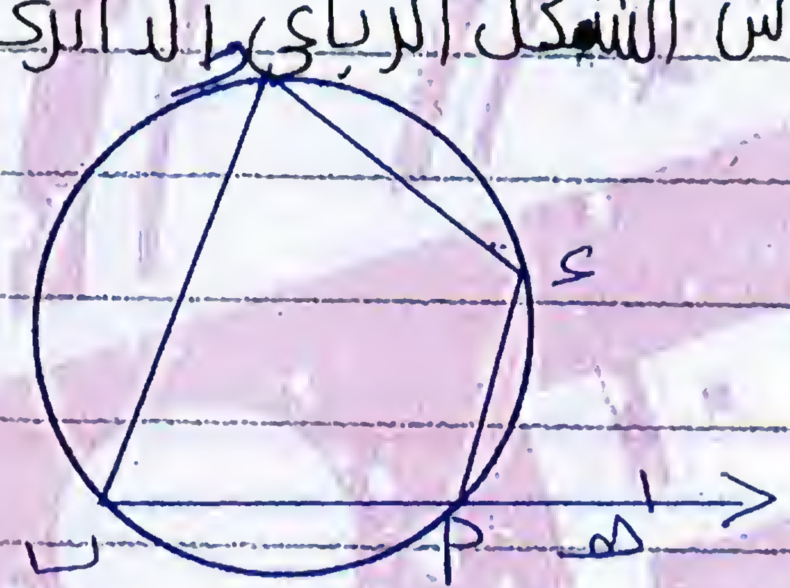
∵ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب جـ د⌒) ، ق(∠جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب أ د⌒)

∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب جـ د⌒) + ق(ب أ د⌒)]

= $\frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$

وبالمثل ق(∠ب) + ق(∠د) = 180°

اثبت ان قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



المعطيات: أ ب جـ د رباعي دائري ، هـ ∈ ب أ→ ،

هـ ∉ أ ب

المطلوب: إثبات أن ق(∠هـ أ د) = ق(∠جـ)

البرهان

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠جـ) + ق(∠د أ ب) = 180° متقابلتان ←← ①

∵ هـ ∈ ب أ→ ∴ ق(∠د أ هـ) + ق(∠د أ ب) = 180° ←← ②

من ① ، ②

∴ ق(∠د أ هـ) = ق(∠جـ)

* خواص الشكل الرباعي الدائري *

لإثبات أن الشكل الرباعي دائريًا نثبت حالة واحدة مما يلي (٣١)

١- زاويتان مرسومتان على قاعدة وفي جهة واحدة منها متساويتان في القياس

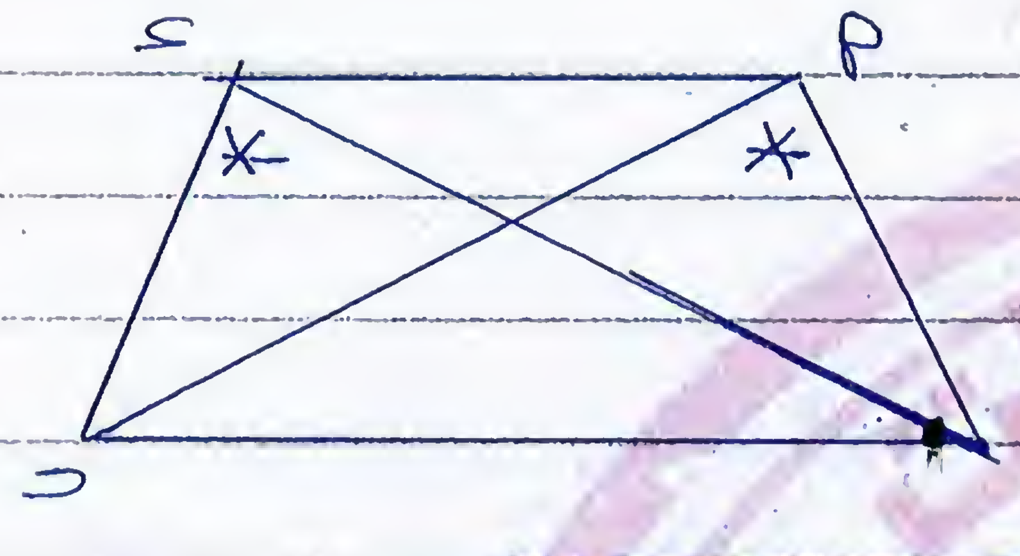
إذا كان:

١- ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب ء جـ) مرسومتان على $\overline{\text{ب جـ}}$

أو ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ء ب) مرسومتان على $\overline{\text{أ ب}}$

أو ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ ء) مرسومتان على $\overline{\text{أ ء}}$

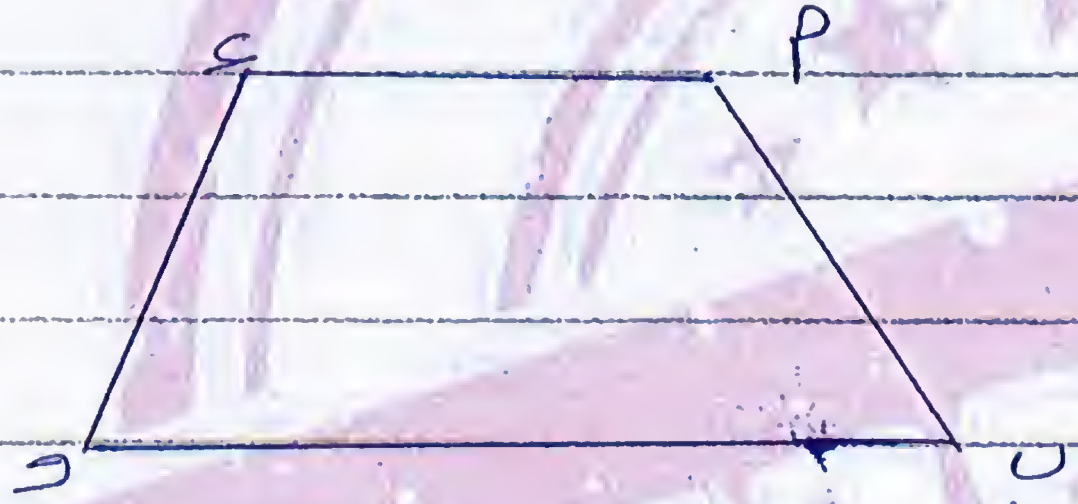
أو ق(∠ء أ جـ) = ق(∠ء ب جـ) مرسومتان على $\overline{\text{ء جـ}}$



٢- زاويتان متقابلتان متكاملتان

إذا كان: ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

أو ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°

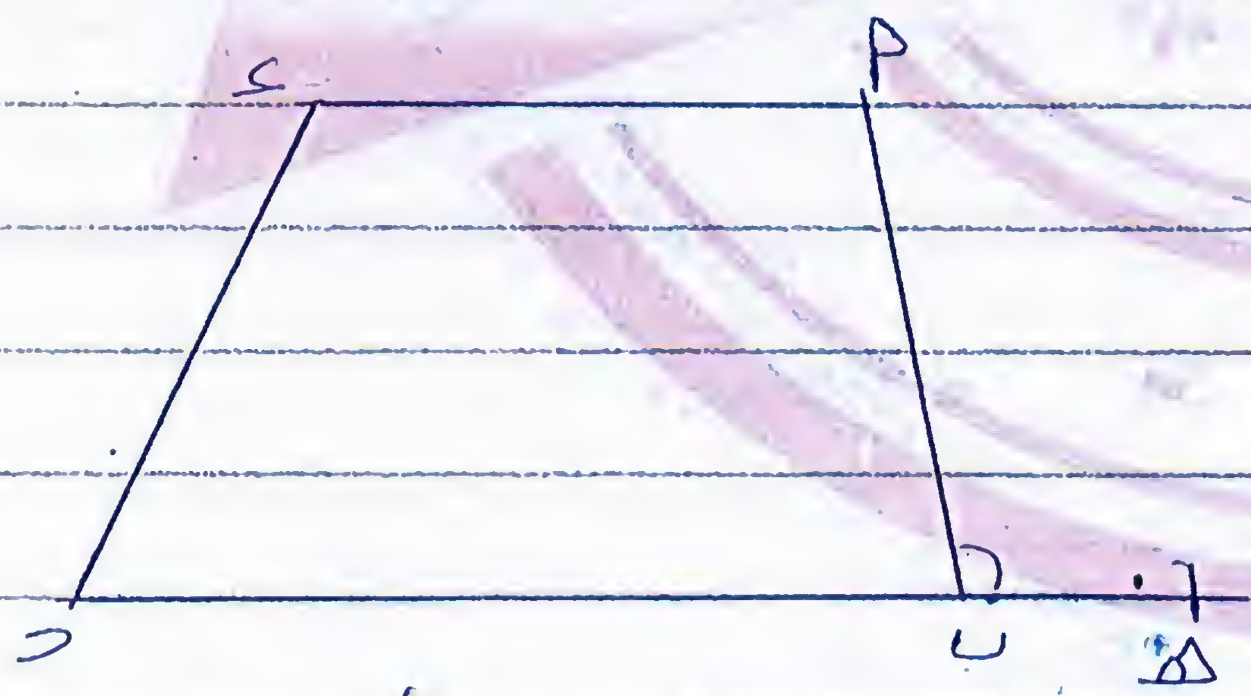


٣- زاوية خارجة عند رأس من رءوسه قياسها يساوي قياس الداخلة المقابلة المجاورة لها

إذا كان

ق(∠أ ب هـ) = ق(∠ء)

فإن: أ ب جـ ء رباعي دائري



٤- توجد نقطة في مستوى الشكل الرباعي على أبعاد متساوية من رءوسه

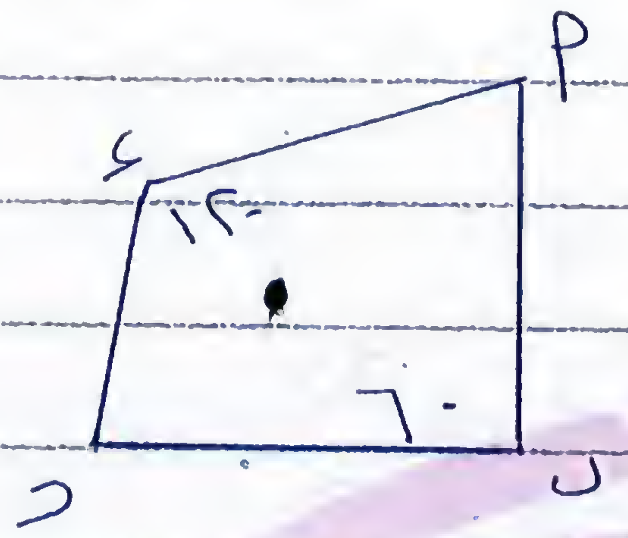
إذا كانت م نقطة بحيث

م أ = م ب = م جـ = م ء

فإن أ ب جـ ء يكون رباعي دائري

في كل شكل من الأشكال الآتية اثبت أن
الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

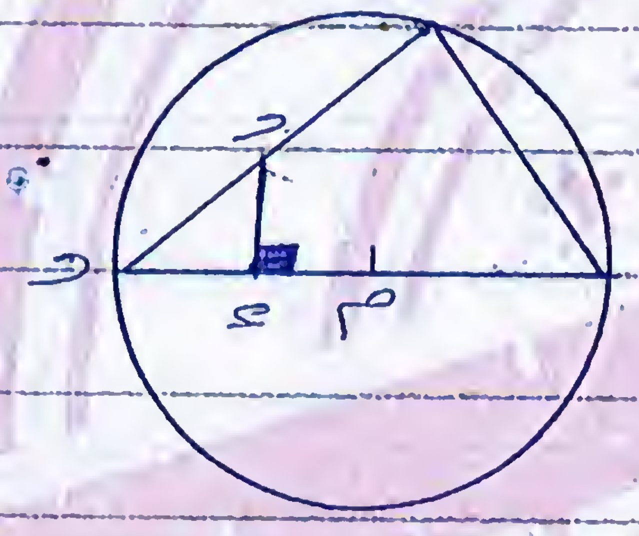
١- في الشكل المقابل:



∵ ق(∠ب) + ق(∠ء) = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠°
وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

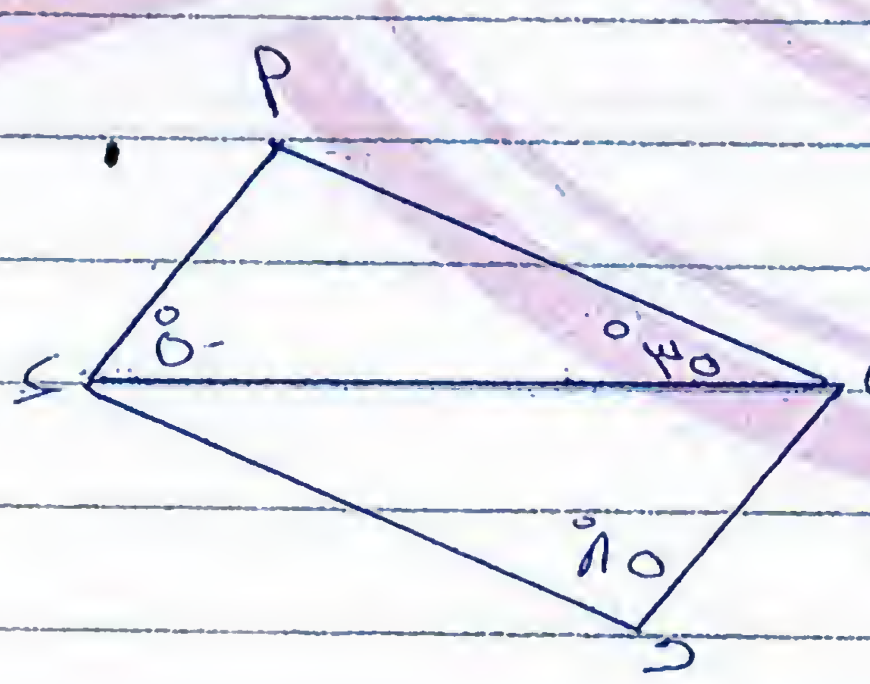
٢-

∵ أ جـ قطر في الدائرة م
∴ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°
محيطية مرسومة في نصف دائرة



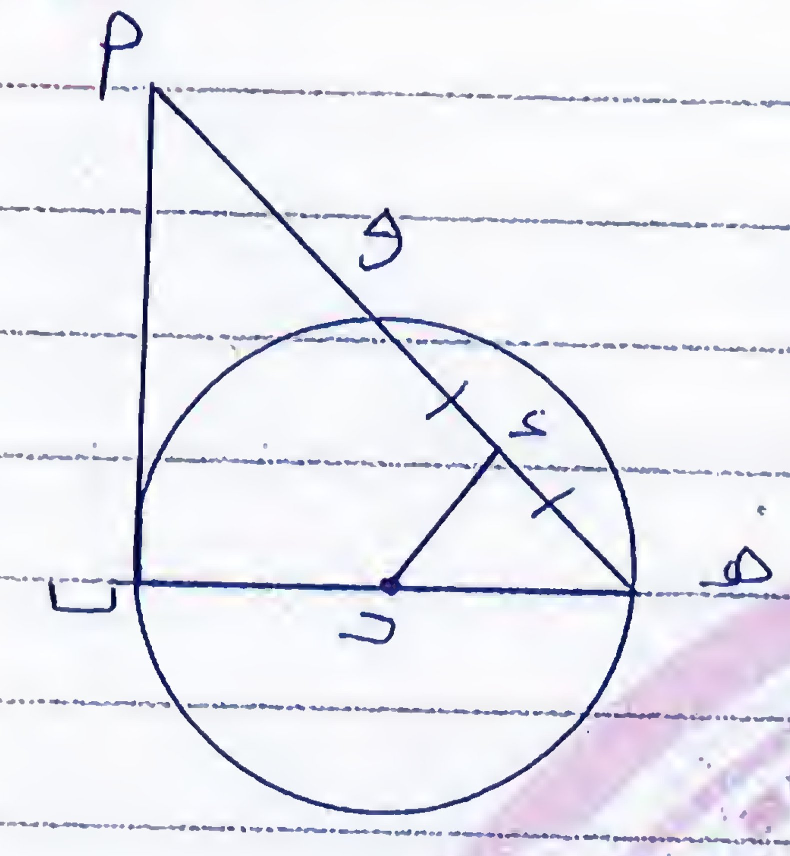
∵ جـ ء ⊥ أ جـ ∴ ق(∠أ ء جـ) = ٩٠°
∵ ق(∠أ ب جـ) + ق(∠أ ء جـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°
وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

٣- في △ أ ب ء
ق(∠أ) = ١٨٠ − (٣٥ + ٥٠)
= ١٨٠ − ٨٥ = ٩٥
∵ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ٨٥ + ٩٥ = ١٨٠°
وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري



٤- في الشكل المقابل:

$\overline{به}$ قطر في الدائرة جـ ، $\overline{أب}$ مماس للدائرة جـ عند ب ، ء منتصف $\overline{هو}$



الحل

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة جـ عند ب

∴ $\overline{أب} \perp \overline{به}$ ∴ ق($\angle$ أبجـ) = ٩٠° ....(١)

∵ ء منتصف $\overline{هو}$

∴ $\overline{جـء} \perp \overline{هو}$ ∴ ق($\angle$ جـءأ) = ٩٠° ....(٢)

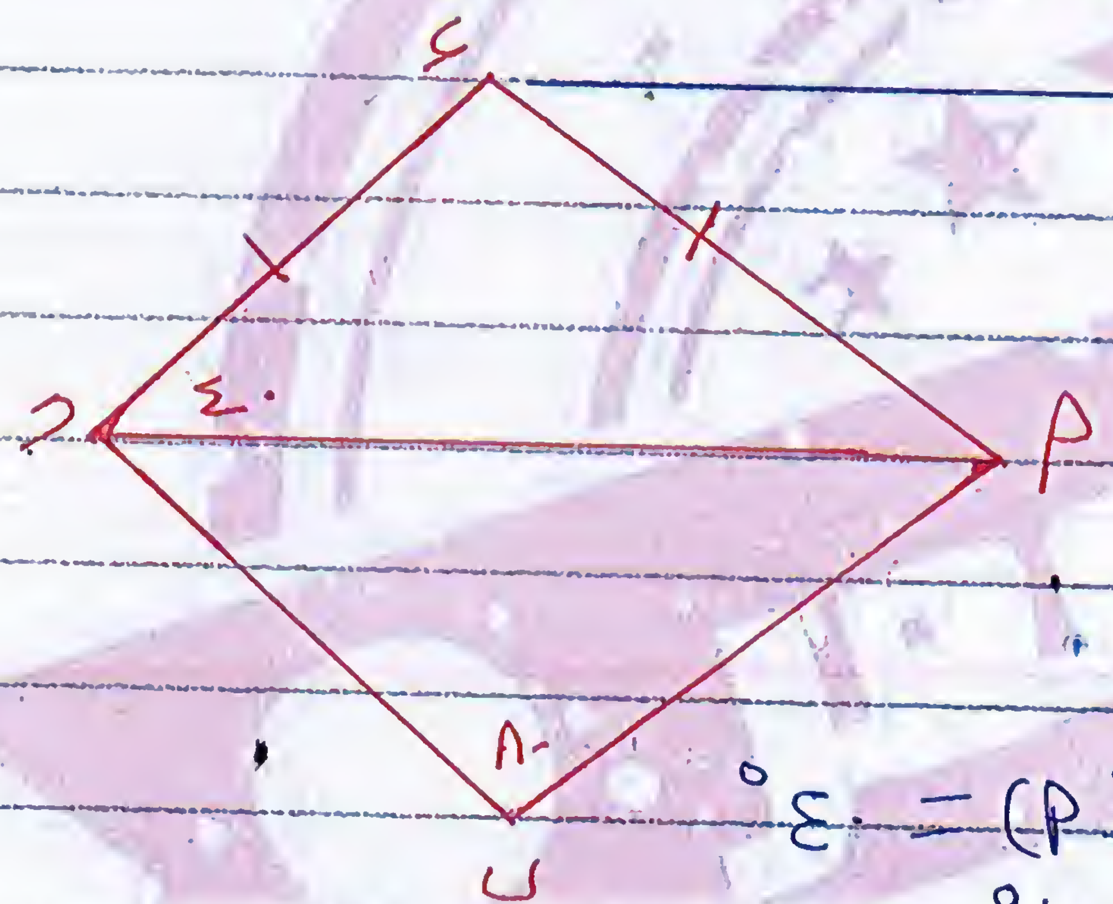
من (١)، (٢) ∴ ق($\angle$ أبجـ) + ق($\angle$ جـءأ) = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أبجـء رباعي دائري

٥- في الشكل المقابل:

أء = ءجـ ، ق($\angle$ أجـء) = ٤٠° ، ق($\angle$ ب) = ٨٠°

أثبت أن الشكل أبجـء رباعي دائري



الحل

في $\triangle$ أءجـ

∵ أء = ءجـ ∴ ق($\angle$ ءأجـ) = ق($\angle$ ءجـأ) = ٤٠°

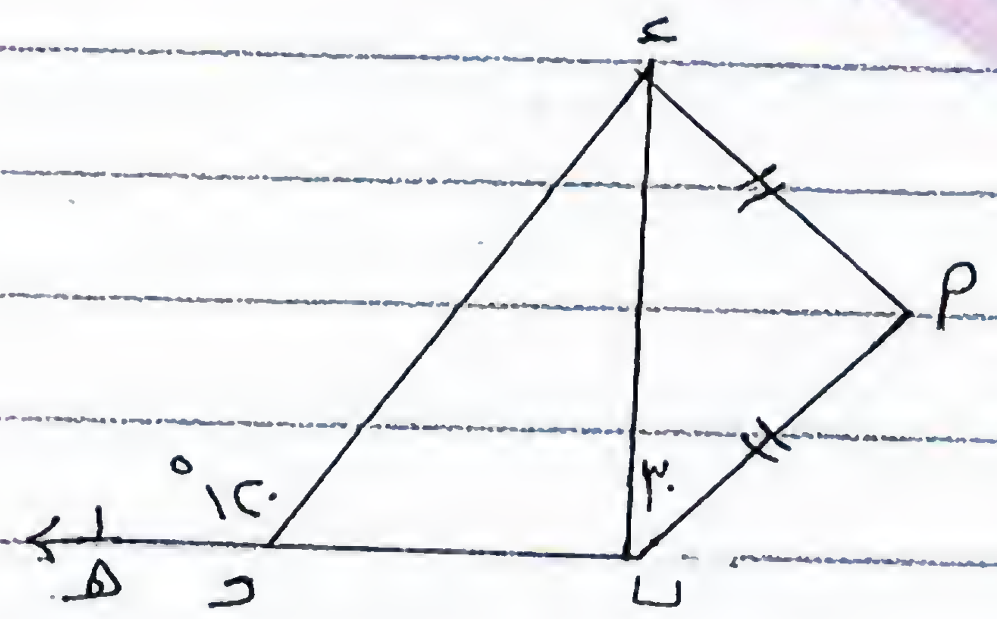
∴ ق($\angle$ ء) = ١٨٠ − (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠°

∴ ق($\angle$ ب) + ق($\angle$ ء) = ٨٠ + ١٠٠ = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أبجـء رباعي دائري

٦- في الشكل المقابل:

أثبت أن الشكل أبجـء رباعي دائري



الحل

في $\triangle$ أبء

∵ أب = أء ∴ ق($\angle$ أءب) = ق($\angle$ أبء) = ٣٠°

∴ ق($\angle$ أ) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

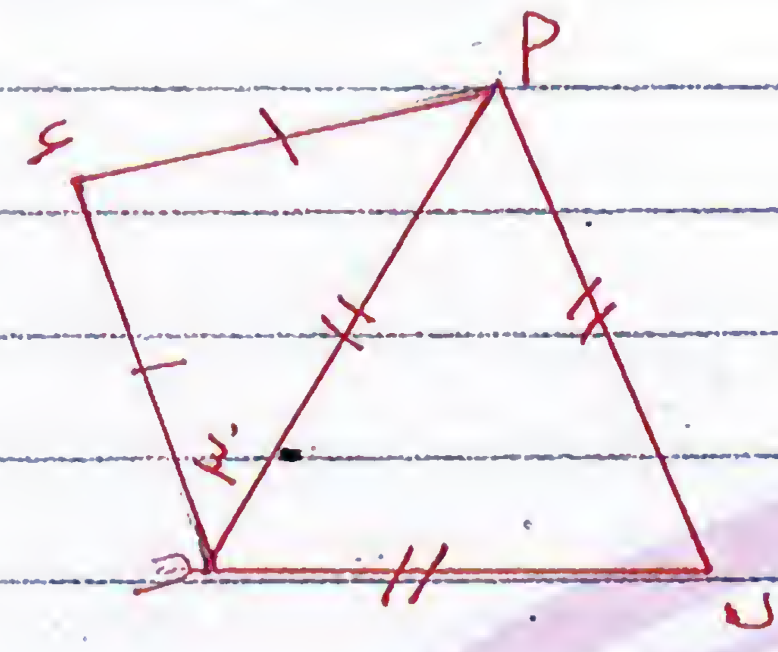
∴ ق($\angle$ ءجـه) = ق($\angle$ أ) = ١٢٠

وهي خارجة عن الشكل أبجـء

∴ الشكل أبجـء رباعي دائري

٧- في الشكل المقابل

اثبت أن: أ ب جـ ء رباعي دائري



الحل

في $\triangle$ أ ب جـ

∵ أ ب = ب جـ = جـ أ

∴ ق($\hat{ب}$) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠° ...... (١)

في $\triangle$ أ ء جـ

∵ أ ء = ء جـ

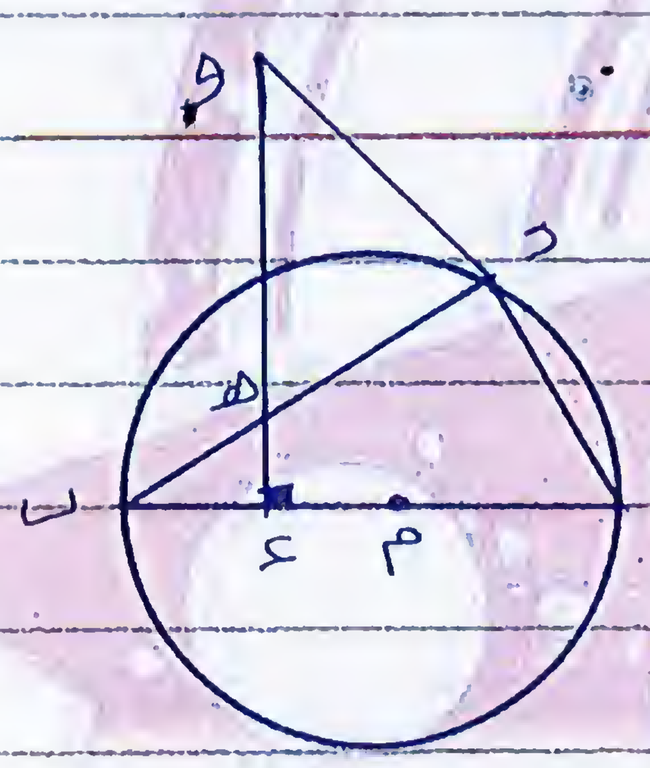
∴ ق(∠ء جـ أ) = ق(∠ء أ جـ) = ٣٠°

∴ ق($\hat{ء}$) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠° ...... (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{ء}$) = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري



٨- في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م، ء هـ ⊥ $\overline{أب}$،

ق(∠و جـ هـ) = ق($\hat{أ}$)

اثبت أن: ١- الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

٢- و جـ = و هـ

الحل

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° (محيطية مرسومة في نصف دائرة) ...... (١)

∵ ء هـ ⊥ $\overline{أب}$

∴ ق(∠هـ ء أ) = ٩٠ ...... (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق(∠أ جـ ب) + ق(∠أ ء هـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

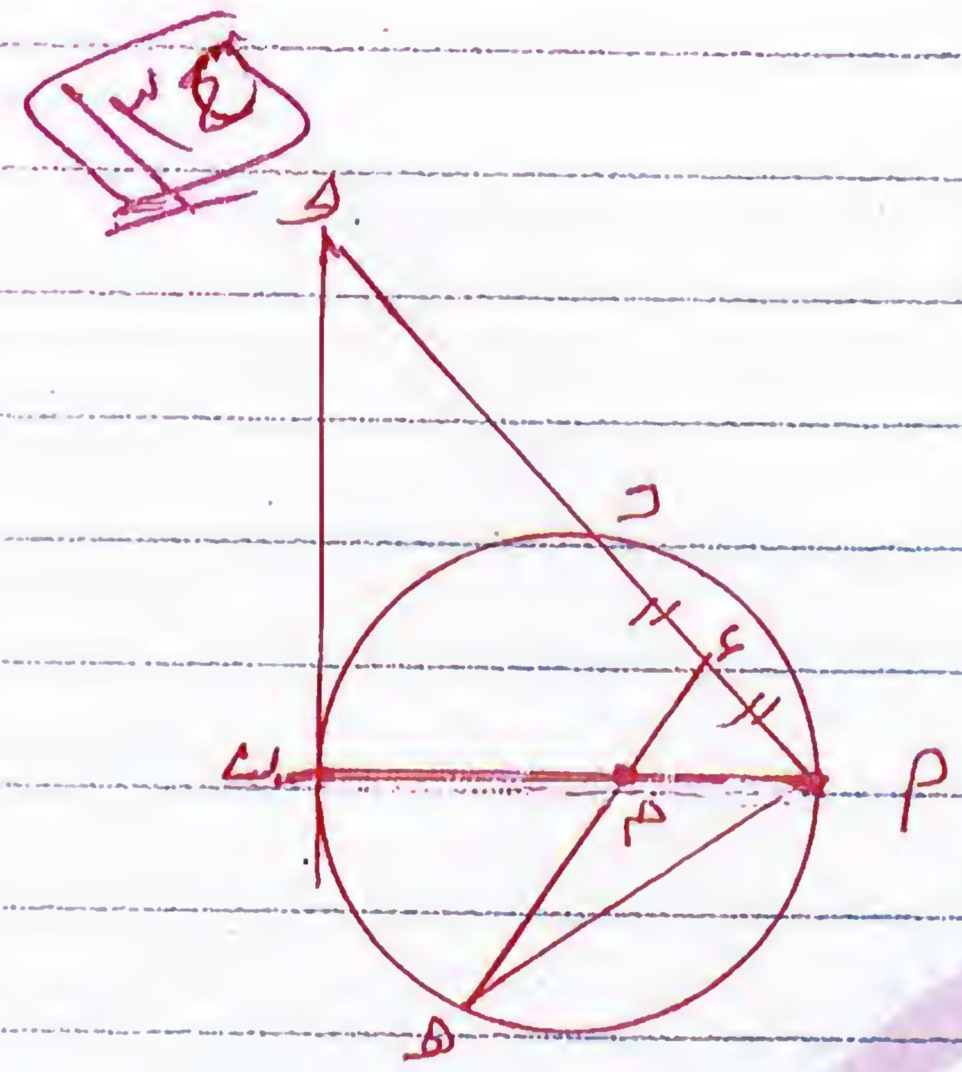
وهما متقابلتان ∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

∵ أ ء هـ جـ رباعي دائري

∴ ق(∠و هـ جـ) = ق($\hat{أ}$) خارجة عن الرباعي الدائري

∵ ق(∠و جـ هـ) = ق($\hat{أ}$) (معطى)

∴ ق(∠و هـ جـ) = ق(∠و جـ هـ) ∴ و جـ = و هـ



٩ـ في الشكل المقابل :-

أب قطر في الدائرة م ، ء منتصف أجـ ، ب و مماس للدائرة م عند ب

اثبت أن : ١ـ الشكل م ب و ء رباعي دائري

٢ـ ق(∠أ و ب) = ٢ق(∠هـ)

الحل

∵ ء منتصف أجـ ∴ م ء ⊥ أجـ

∵ و ب مماس للدائرة م عند ب ∴ و ب ⊥ م ب

∴ ق(∠أ ء و) + ق(∠م ب و) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل م ب و ء رباعي دائري (أولاً)

∵ الشكل م ب و ء رباعي دائري

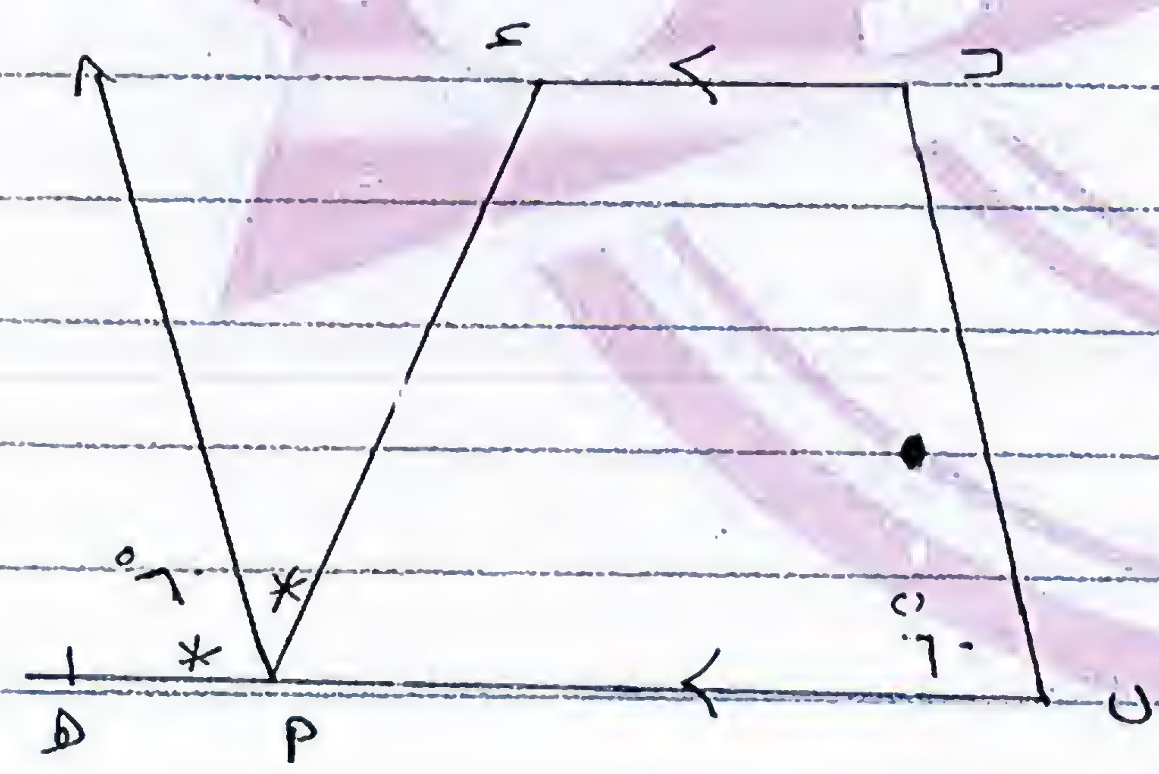
∴ ق(∠أ م ء) = ق(∠و) خارجة عن الرباعي الدائري ـــ ①

في △ أ م هـ ∵ م أ = م هـ = نق ∴ ق(∠م أ هـ) = ق(∠م هـ أ)

∵ ∠أ م ء خارجة عن △ أ م هـ

∴ ق(∠أ م ء) = ٢ق(∠هـ) ـــ ②

من ①، ② ∴ ق(∠أ و ب) = ٢ق(∠هـ) (ثانياً)



١٠ـ في الشكل المقابل :

أو ينصف ∠ء أ هـ ، جـ ء // ب هـ ،

ق(∠و أ هـ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٦٠°

اثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

الحل

∵ جـ ء // ب هـ ، ب جـ قاطع لهما

∴ ق(∠جـ) + ق(∠ب) = ١٨٠ بالتداخل

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠ ـــ ①

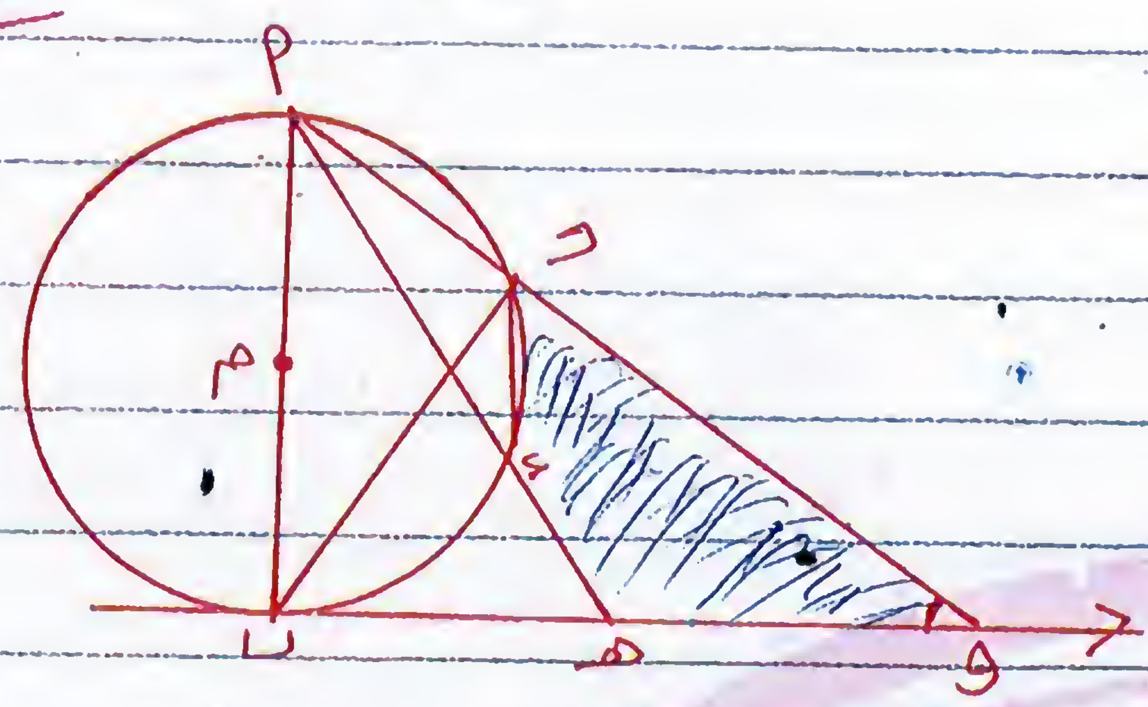
∵ أو ينصف ∠ء أ هـ

∴ ق(∠ء أ هـ) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠ ـــ ②

من ①، ② ∴ ق(∠ء أ هـ) = ق(∠جـ)

وهي خارجة عن الشكل أ ب جـ ء ∴ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

١١- في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أء}$ وتران فيها ، $\overleftrightarrow{ب و}$ مماس عند ب قطع $\overrightarrow{أجـ}$ في و ، $\overrightarrow{أء}$ في هـ

فإذا كان ق(∠و) = ٣٠°

أثبت أن: الشكل جـ و هـ ء رباعي دائري

الحل

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أجـب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ جـ ∈ $\overline{أو}$ ∴ ق(∠وجـب) = ١٨٠ - ٩٠ = ٩٠°

∴ △ وجـب قائم الزاوية في جـ

∴ ق(∠وبجـ) = ١٨٠ - (٣٠ + ٩٠) = ٦٠°

∵ $\overleftrightarrow{وب}$ مماس للدائرة م عند ب

∴ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{وب}$ ∴ ق(∠أبو) = ٩٠°

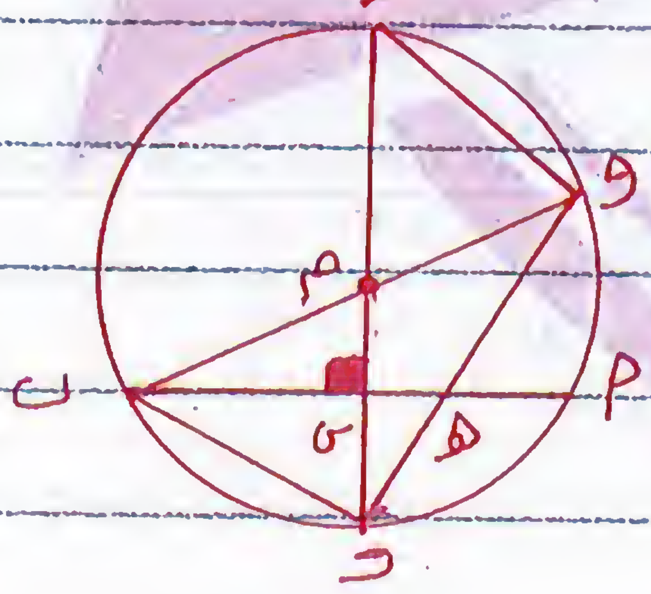
∴ ق(∠أبجـ) = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠°

∴ ق(∠جـءأ) = ق(∠جـبأ) = ٣٠° محيطيتان تحصران أجـ

∴ ق(∠جـءأ) = ق(∠و) = ٣٠° وهي خارجة عن الشكل الرباعي جـ و هـ ء

∴ الشكل جـ و هـ ء رباعي دائري

١٢- في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، $\overline{جـء}$ قطر عمودي على $\overline{أب}$ ويقطعه في س ، $\overrightarrow{بم}$ يقطع الدائرة في و ، $\overline{وجـ}$ ∩ $\overline{أب}$ = {هـ}

أثبت أن: ① الشكل ء و هـ س رباعي دائري

② ق(∠جـهـس) = ق(∠جـبو)

الحل

∵ $\overline{جـء}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠جـوء) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

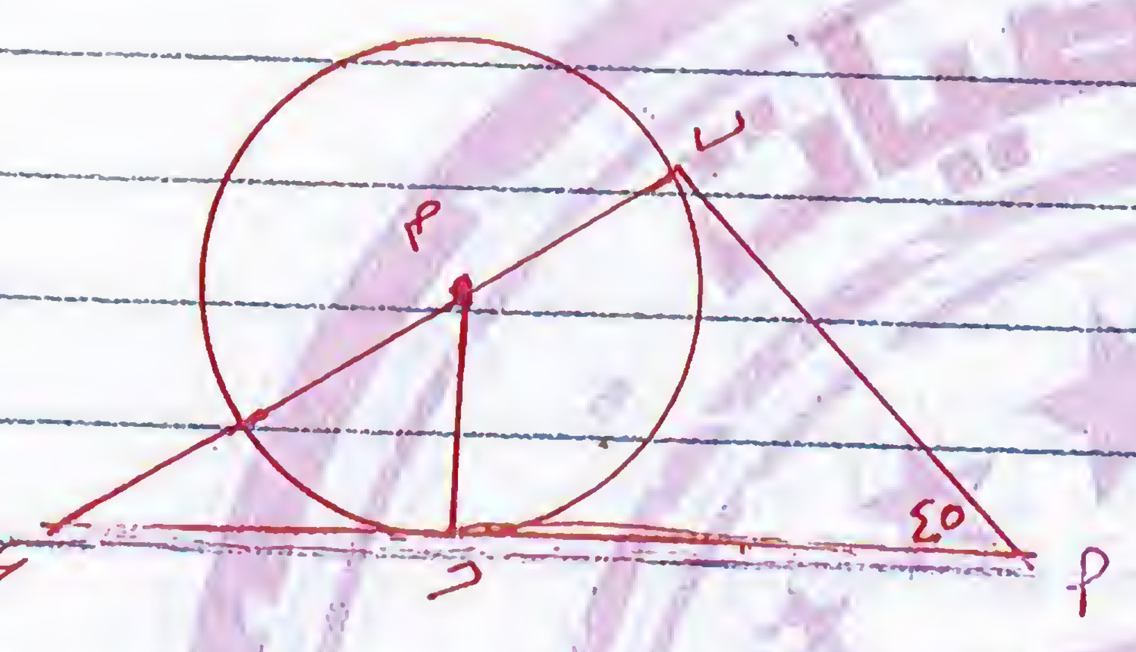
∵ $\overline{ءجـ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ ق(∠ءسب) = ٩٠°

∴ ق(∠ءسب) = ق(∠و) = ٩٠° وهي خارجة عن الشكل ء و هـ س

∴ الشكل ء و هـ س رباعي دائري

∵ الشكل ع و هـ س رباعي دائري
∴ ق(∠د هـ س) = ق(∠ع) خارجة عن الرباعي الدائري ..... (١)
ق(∠د ث ى) = ق(∠ع) محيطيتان تحصران د و ..... (٢)
من (١)، (٢) ∴ ق(∠د هـ س) = ق(∠د ث ى)

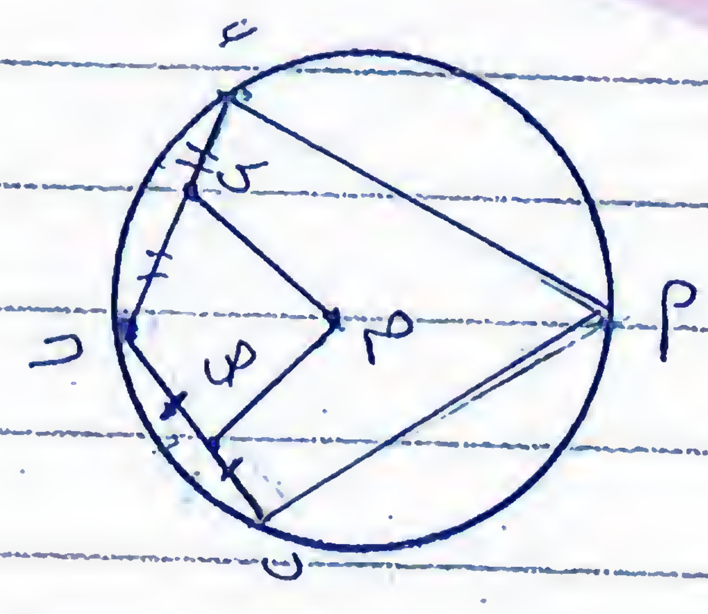
١٣- في الشكل المقابل:



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م عند ب، جـ
ق(∠أ) = ٤٥°، $\overrightarrow{بم} \cap \overleftrightarrow{أجـ} = \{ء\}$
أثبت أن: ① الشكل أ ب م جـ رباعي دائري
② جـ ء = جـ م

الحل
∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب
∴ $\overline{مب} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°
∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة م عند جـ ∴ $\overline{مجـ} \perp \overline{أجـ}$
∴ ق(∠أ جـ م) = ٩٠°
∴ ق(∠أ ب م) + ق(∠أ جـ م) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان
∴ الشكل أ ب م جـ رباعي دائري
∴ ق(∠ء م جـ) = ق(∠أ) = ٤٥ خارجة عن الرباعي الدائري
في △ أ ب ء القائم في ب ∴ ق(∠ء) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٥) = ٤٥
∴ ق(∠جـ م ء) = ق(∠جـ ء م) = ٤٥ ∴ جـ ء = جـ م

١٤- في الشكل المقابل:



أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م،
ص منتصف $\overline{بجـ}$ ، س منتصف جـ ء
أثبت أن: ① الشكل م س جـ ص رباعي دائري
② ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ ء)

الحل:
∵ ص منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ $\overline{مص} \perp \overline{بجـ}$
∴ ق(∠م ص جـ) = ٩٠°
∴ ق(∠م س جـ) + ق(∠م ص جـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

(١٨)

∴ الشكل م س د ص رباعي دائري

∴ ق(∠م) + ق(∠ن) = ١٨٠ ..... ①

∴ أ ب د ع رباعي دائري

∴ ق(∠أ) + ق(∠ن) = ١٨٠° ..... ②

من ①، ②

∴ ق(∠أ) = ق(∠م)

١٥- في الشكل المقابل:

دائرتان متقاطعتان في أ، ب

د ع يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرتين في د، ع

د هـ ∩ ع و = {س}

اثبت أن: أ و س هـ شكل رباعي دائري

العمل: نرسم $\overline{أب}$

البرهان:

∵ هـ د ب أ رباعي دائري

∴ ق(∠س هـ أ) = ق(∠أ ب د) خارجة عن الرباعي الدائري ..... ①

∵ أ ب ع و رباعي دائري

∴ ق(∠س و أ) = ق(∠أ ب ع) خارجة عن الرباعي الدائري ..... ②

∵ ب ∈ $\overline{د ع}$

∴ ق(∠أ ب د) + ق(∠أ ب ع) = ١٨٠° ..... ③

بالتعويض من ①، ②، في ③

∴ ق(∠س هـ أ) + ق(∠س و أ) = ١٨٠° وهما متقابلتان

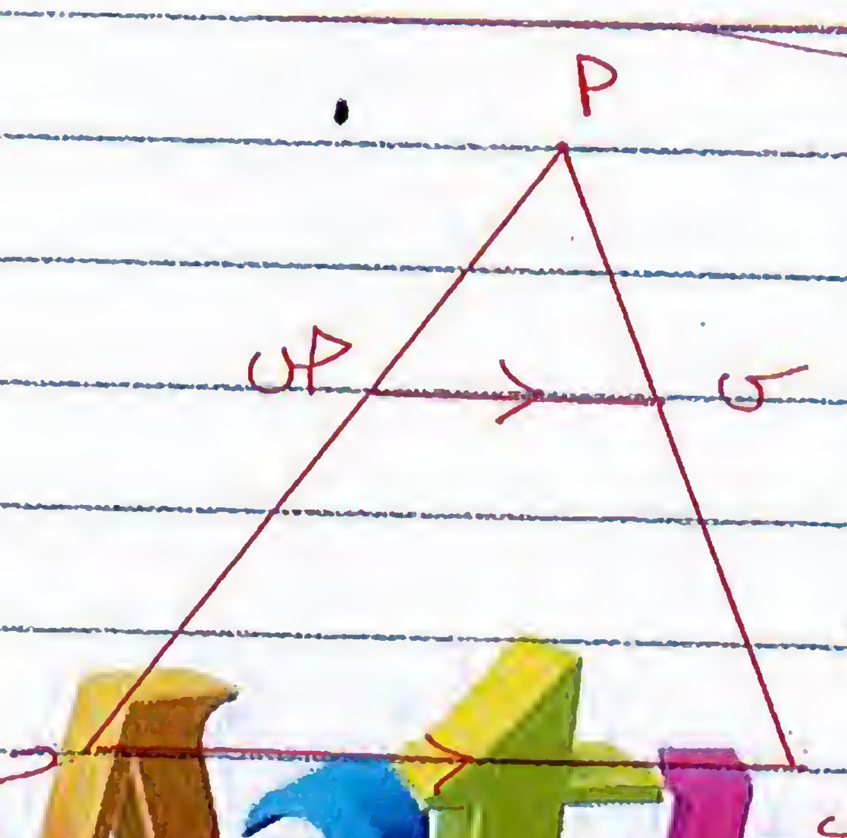
∴ الشكل أ و س هـ رباعي دائري

١٦- في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أب = أجـ، س ∈ $\overline{أب}$

ص ∈ $\overline{أجـ}$ بحيث $\overline{سص}$ // $\overline{ب جـ}$

اثبت أن: الشكل س ب جـ ص رباعي دائري



٣٩

الحل

$\because$ أب = أج $\therefore$ ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{ج}$) ...... (1)

$\because$ $\overline{سص}$ // $\overline{بج}$ ، أب قاطع لهما

$\therefore$ ق(أ $\hat{ص}$ س) = ق($\hat{ب}$) بالتناظر ...... (2)

من (1) ، (2)

$\therefore$ ق(أ $\hat{ص}$ س) = ق($\hat{ج}$)

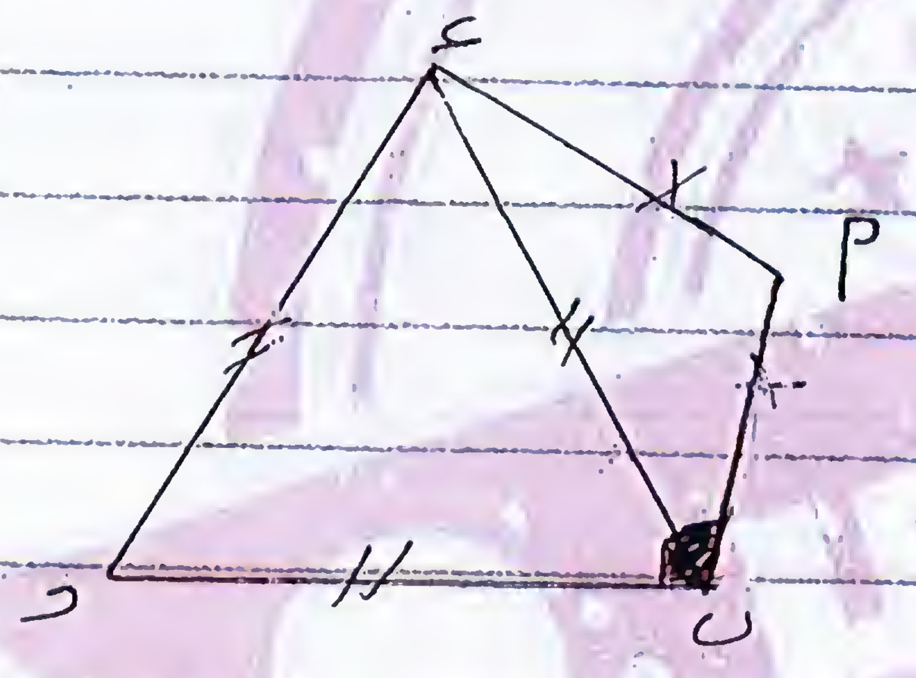
وهي خارجة عن الشكل س ب ج ص $\therefore$ الشكل س ب ج ص رباعي دائري

17- في الشكل المقابل:

أ ب ج د شكل رباعي فيه $\overline{أب} \perp \overline{جب}$ ، أب = أد ،

ب ج = ج د = د ب

اثبت أن: الشكل أ ب ج د رباعي دائري



الحل

في $\triangle$ ب ج د

$\because$ ب ج = ج د = د ب

$\therefore$ ق(د $\hat{ب}$ ج) = ق($\hat{ج}$) = ق(ب $\hat{د}$ ج) = 60°

$\because$ $\overline{أب} \perp \overline{بج}$

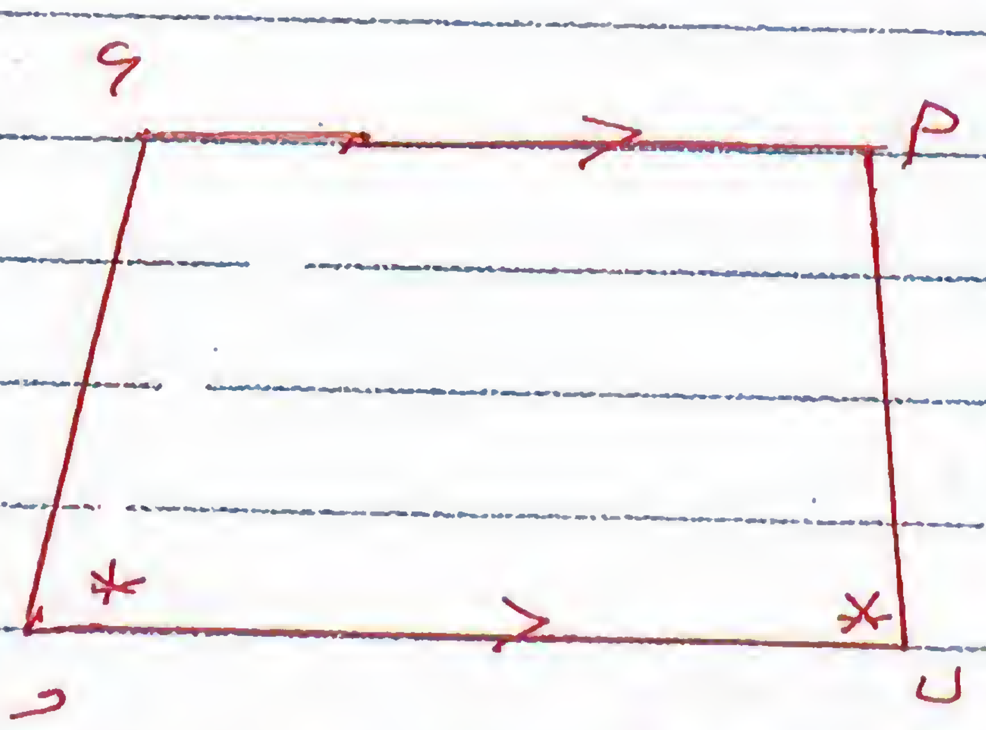
$\therefore$ ق(أ $\hat{ب}$ د) = 90 − 60 = 30°

في $\triangle$ أ ب د $\because$ أب = أد $\therefore$ ق(أ $\hat{ب}$ د) = ق(أ $\hat{د}$ ب) = 30°

$\therefore$ ق(ب $\hat{أ}$ د) = 180 − (30 + 30) = 120°

$\therefore$ ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ج}$) = 120 + 60 = 180° وهما متقابلتان

$\therefore$ الشكل أ ب ج د رباعي دائري



18- في الشكل المقابل: $\overline{أد}$ // $\overline{بج}$ ، ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{ج}$)

اثبت أن: الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل: $\because$ $\overline{أد}$ // $\overline{بج}$ ، أب قاطع لهما

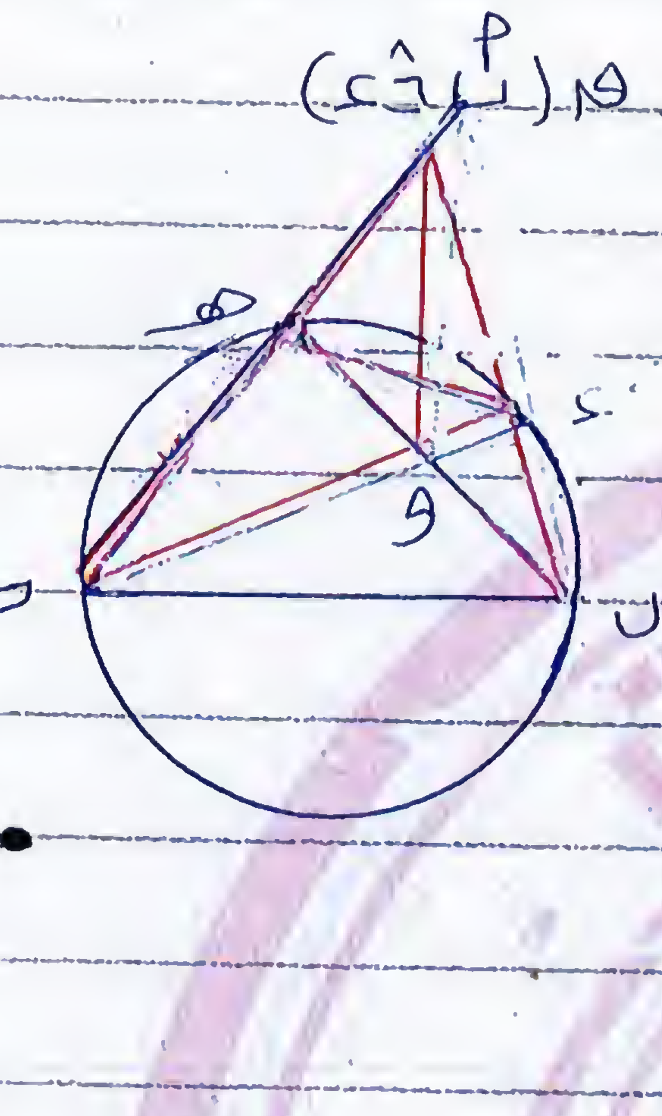
$\therefore$ ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ب}$) = 180 ...... (1)

$\because$ ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{ج}$) ...... (2) بالتعويض من (1) في (2)

$\therefore$ ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ج}$) = 180° وهما متقابلتان

$\therefore$ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

١٩- في الشكل المقابل:
أ ب ج مثلث رسمت دائرة قطرها ب ج وتقطع أب في د ، أج في نقطة هـ
فإذا كان ب هـ ∩ ج د = {و}
اثبت أن: (١) أ د و هـ شكل رباعي دائري (٢) ق(∠د أ و) = ق(∠ب ج د)



الحل

∵ ب ج قطر في الدائرة م
∴ ق(∠ب د ج) = ق(∠ب هـ ج) = ٩٠ (مرسومتان في نصف دائرة)
∵ د ∈ أب ∴ ق(∠أ د و) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°
∵ هـ ∈ أج ∴ ق(∠أ هـ و) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°
∴ ق(∠أ د و) + ق(∠أ هـ و) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°
وهما متقابلتان ∴ الشكل أ د و هـ رباعي دائري
∵ الشكل أ د و هـ رباعي دائري
∴ ق(∠د أ و) = ق(∠د هـ و) مرسومتان على د و ... (١)
∵ ق(∠ب ج د) = ق(∠ب هـ د) محيطيتان تحصران ب د ... (٢)
من (١)، (٢) ∴ ق(∠د أ و) = ق(∠ب ج د)

٢٠- في الشكل المقابل:
دائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب رسم الوتر أء في الدائرة ن فإذا كانت س منتصف أء
أب ∩ م ن = {ص}
اثبت أن: الشكل أ س ن ص رباعي دائري

الحل

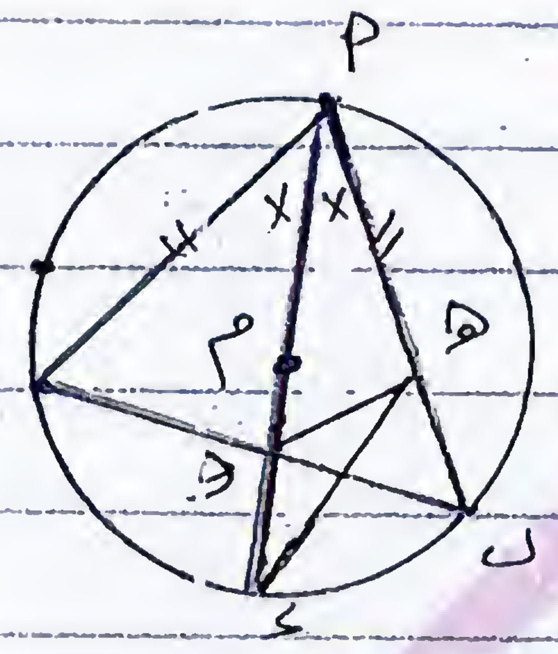
م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب
∴ م ن ⊥ أ ب ∴ ق(∠أ ص ن) = ٩٠°
∵ س منتصف أء ∴ ن س ⊥ أء
∴ ق(∠أ س ن) = ٩٠°
∴ ق(∠أ ص ن) + ق(∠أ س ن) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠° وهما متقابلتان
∴ الشكل أ س ن ص رباعي دائري

أ٤

٢١- في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران في الدائرة م ، $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، هـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث أهـ = أجـ

اثبت أن : ق (∠ د ب و) = ق (∠ د هـ و)



الحل

△△ أ هـ و ، أ جـ و

فيهما
أهـ = أجـ
أو ضلع مشترك
ق (∠ هـ أ و) = ق (∠ جـ أ و)   ($\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ)

∴ △ أ هـ و ≡ △ أ جـ و

وينتج من التطابق أن : ق (∠ أ هـ و) = ق (∠ أ جـ و) ...... (١)

∵ ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ أ د ب)   محيطيتان تحصران $\overset\frown{أب}$ ...... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق (∠ أ هـ و) = ق (∠ و د ب)   وهي خارجة عن الشكل هـ ب د و

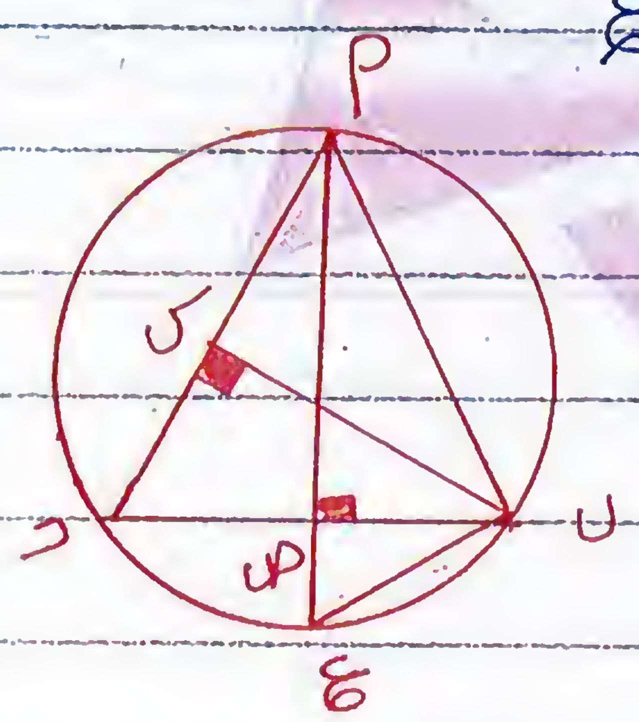
∴ الشكل هـ ب د و رباعي دائري

∴ ق (∠ د ب و) = ق (∠ د هـ و)

٢٢- في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overline{بس}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أص}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ يقطعه في ص ويقطع الدائرة في ع

اثبت أن : (١) الشكل أ ب ص س رباعي دائري   (٢) $\overrightarrow{بجـ}$ ينصف ∠ س ب ع



الحل

∵ $\overline{بس}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ ∴ ق (∠ أ س ب) = ٩٠° ،

∵ $\overline{أص}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ ∴ ق (∠ أ ص ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ أ س ب) = ق (∠ أ ص ب) = ٩٠° وهما مرسومتان على $\overline{أب}$

∴ الشكل أ ب ص س رباعي دائري

∴ الشكل أ ب ص س رباعي دائري

∴ ق (∠ ص ب س) = ق (∠ ص أ س)   مرسومتان على $\overline{سص}$ ...... (١)

∵ ق (∠ ع ب جـ) = ق (∠ ع أ جـ)   محيطيتان على $\overset\frown{عجـ}$ ...... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق (∠ ع ب جـ) = ق (∠ جـ ب س)

∴ $\overrightarrow{بجـ}$ ينصف ∠ س ب ع

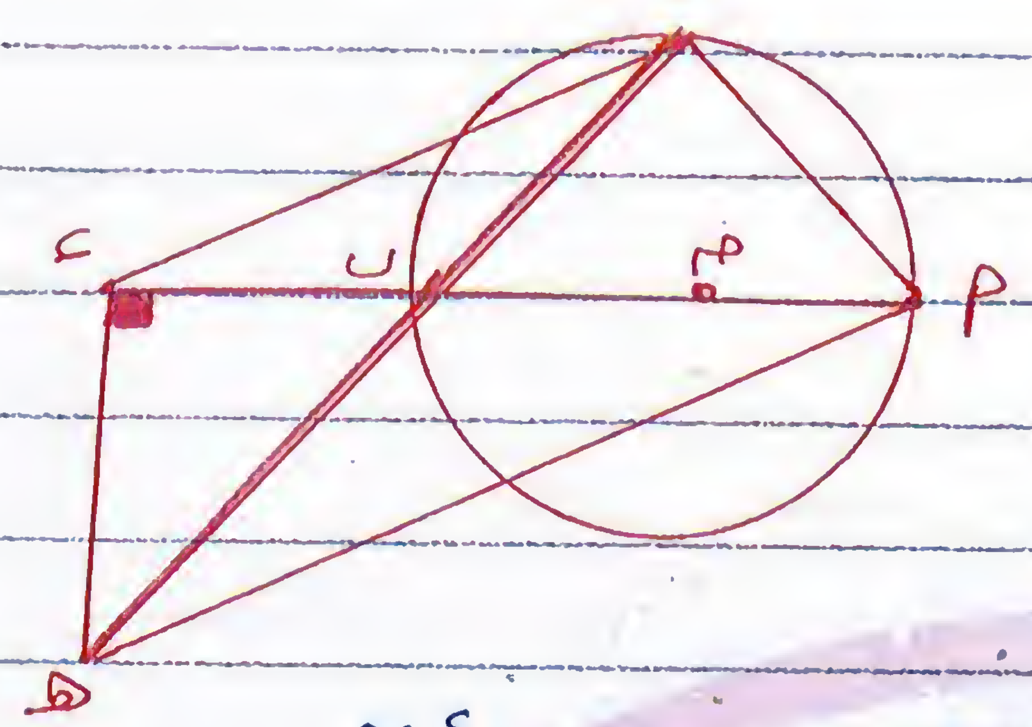
(٢٢)

٤٧

٤٣- في الشكل المقابل:

أب قطر في الدائرة م ، رسم ءهـ ⊥ أب ،

جـب ∩ ءهـ = {هـ}



أثبت أن: أجـءهـ شكل رباعي دائري

الحل

∵ أب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أجـب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ ءهـ ⊥ أب ∴ ق(∠أءهـ) = ٩٠°

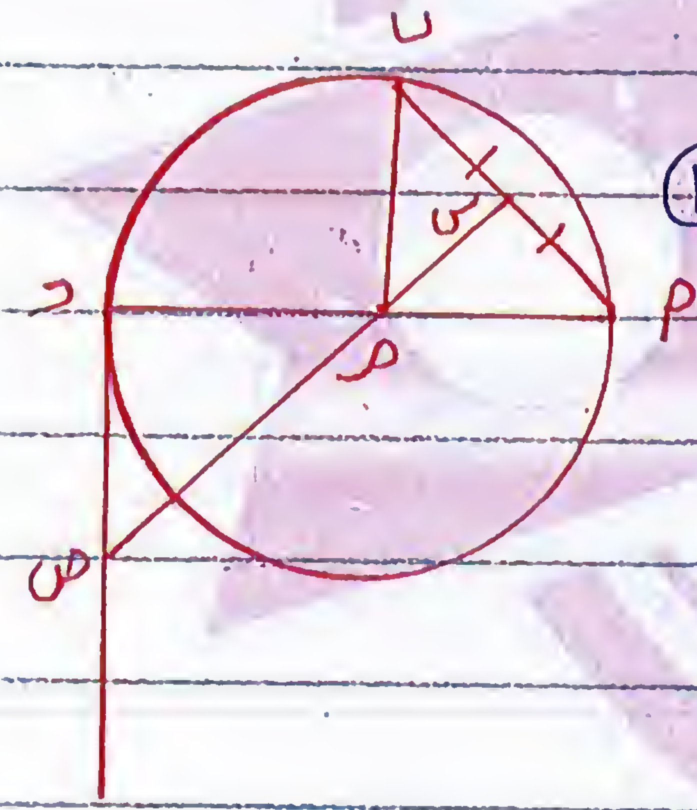
∴ ق(∠أجـهـ) = ق(∠أءهـ) = ٩٠° وهما مرسومتان على أهـ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أجـءهـ رباعي دائري

٤٤- في الشكل المقابل:

أجـ قطر في الدائرة م ، س منتصف أب ، جـص مماس للدائرة قطع مس في ص

أثبت أن: (١) الشكل أسجـص رباعي دائري (٢) ق(∠بمجـ) = ٢ق(∠مصجـ)



الحل

∵ س منتصف أب ∴ مس ⊥ أب ∴ ق(∠أسص) = ٩٠° ...(١)

∵ جـص مماس للدائرة م عند جـ

∴ جـص ⊥ مجـ ∴ ق(∠أجـص) = ٩٠° ...(٢)

من (١)، (٢) ∴ ق(∠أسص) = ق(∠أجـص)

وهما مرسومتان على أص وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أسجـص رباعي دائري

∴ ق(∠سأجـ) = ق(∠سصجـ) مرسومتان على سجـ

∴ ق(∠بأجـ) = ق(∠مصجـ) ...(٣)

∵ ق(∠بمجـ) = ٢ق(∠بأجـ) محيطية ومركزية تحصران بجـ ...(٤)

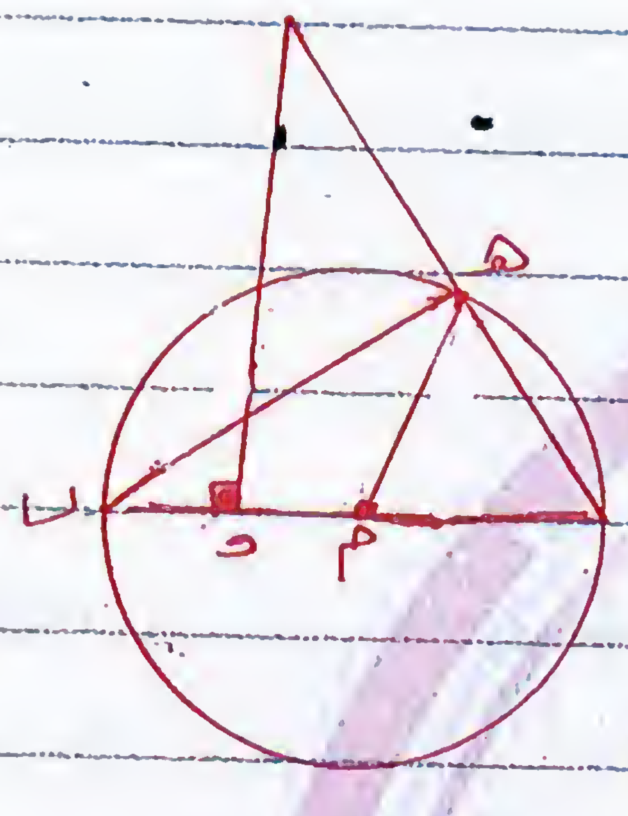
من (٣)، (٤)

∴ ق(∠بمجـ) = ٢ق(∠مصجـ)

٢٥- في الشكل المقابل:

أب قطر في الدائرة م ، أهـ وتر فيها ، رسم $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp \overline{أب}$ فقطع $\overleftrightarrow{أهـ}$ في ء

أثبت أن: ① النقط ء ، هـ ، د ، ب يمر بها دائرة واحدة ② ق(∠أمهـ) = ٢ق(∠ء)



الحل

∵ أب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أهـب) = ٩٠° (محيطية مرسومة في نصف دائرة)

∵ هـ ∈ أء ∴ ق(∠ءهـب) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠° ...①

∵ $\overleftrightarrow{جـ ء} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠ءدب) = ٩٠° ...②

من ①، ② ∴ ق(∠ءهـب) = ق(∠ءدب)

وهما مرسومتان على ءب وفي جهة واحدة منها

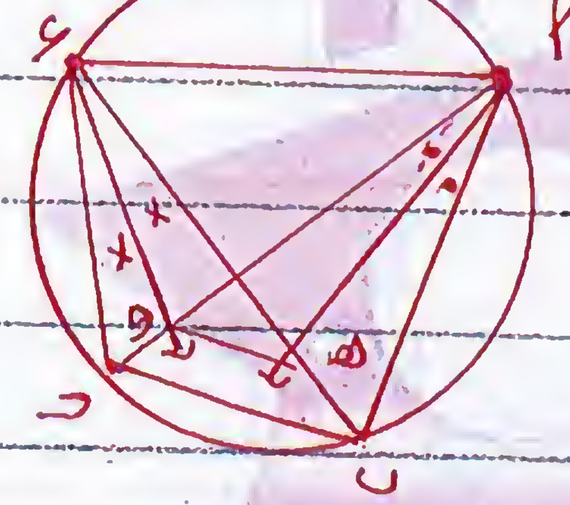
∴ الشكل ءهـدب رباعي دائري

∴ ق(∠أدهـ) = ق(∠ء) مرسومتان على هـب ...③

∵ ق(∠أمهـ) = ٢ق(∠أدهـ) محيطية ومركزية تحصران أهـ ...④

من ③، ④ ∴ ق(∠أمهـ) = ٢ق(∠ء)

٢٦- في الشكل المقابل:



أبجـء شكل رباعي دائري فيه $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠بأجـ ، $\overrightarrow{ءو}$ ينصف ∠بءجـ

أثبت أن: ① أهـوء شكل رباعي دائري ② $\overline{هـو} \parallel \overline{بجـ}$

الحل

∵ أبجـء رباعي دائري

∴ ق(∠بأجـ) = ق(∠بءجـ) ...①

∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠بأجـ

∴ ق(∠هـأو) = $\frac{1}{2}$ ق(∠بأجـ) ...②

∵ $\overrightarrow{ءو}$ ينصف ∠بءجـ

∴ ق(∠هـءو) = $\frac{1}{2}$ ق(∠بءجـ) ...③

من ①، ②، ③

∴ ق(∠هـأو) = ق(∠هـءو)

وهما مرسومتان على هـو وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أهـوء رباعي دائري

∴ ق(∠ءأو) = ق(∠ءهـو) مرسومتان على ءو

∴ ق(∠ءأجـ) = ق(∠ءهـو) ...④

∵ الشكل أبجـء رباعي دائري

∴ ق(∠ءأجـ) = ق(∠ءبجـ) ...⑤

من ④، ⑤

∴ ق(∠ءهـو) = ق(∠ءبجـ)

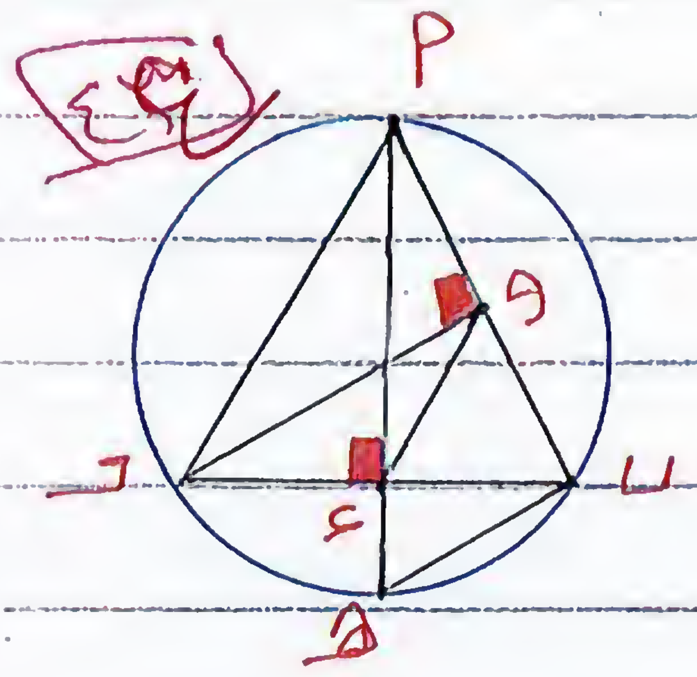
وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{هـو} \parallel \overline{بجـ}$

في الشكل المقابل:

$\overline{أء} \perp \overline{بج}$ يقطعها في ء ويقطع الدائرة في هـ

، $\overline{جو} \perp \overline{أب}$ يقطعها في و



اثبت أن:

① الشكل أ و ء ج رباعي دائري

② ق(∠هـ ب ج) = ق(∠ء و ج)

الحل: ∵ $\overline{أء} \perp \overline{بج}$

∴ ق(∠أ ء ج) = 90° ...... ①

∵ $\overline{جو} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠أ و ج) = 90° ...... ②

من ①، ② ∴ ق(∠أ و ج) = ق(∠أ ء ج) = 90°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ و ء ج رباعي دائري (أولاً)

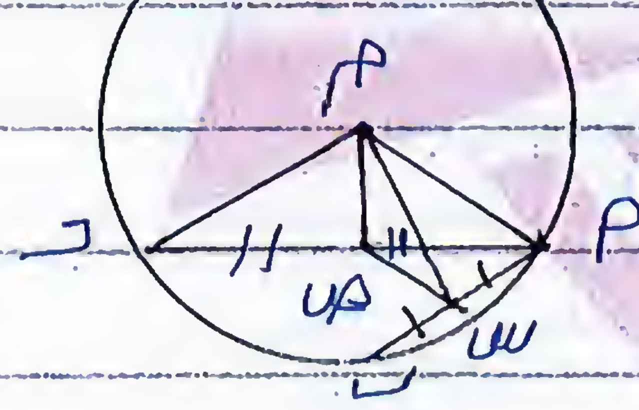
∴ ق(∠ء و ج) = ق(∠ء أ ج) مرسومتان على $\overline{ءج}$

∴ ق(∠ء و ج) = ق(∠هـ أ ج) ...... ③

∵ ق(∠هـ ب ج) = ق(∠هـ أ ج) محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{هـج}$ ...... ④

من ③، ④ ∴ ق(∠هـ ب ج) = ق(∠ء و ج)

دائرة مركزها م ، س، ص منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ على الترتيب



اثبت أن: ① الشكل أ س ص م رباعي دائري

② ق(∠م س ص) = ق(∠م ج ص)

③ $\overline{أم}$ قطر في الدائرة المارة بالنقط أ، س، ص، م

الحل: ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$

∵ ص منتصف $\overline{أج}$ ∴ $\overline{مص} \perp \overline{أج}$

∴ ق(∠أ س م) = ق(∠أ ص م) = 90°

وهما مرسومتان على $\overline{أم}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ س ص م رباعي دائري

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م أ ص) ...... ①

في △ م أ ج

∵ م ج = م أ = نق

∴ ق(∠م أ ج) = ق(∠م ج أ) ...... ②

من ① و ②

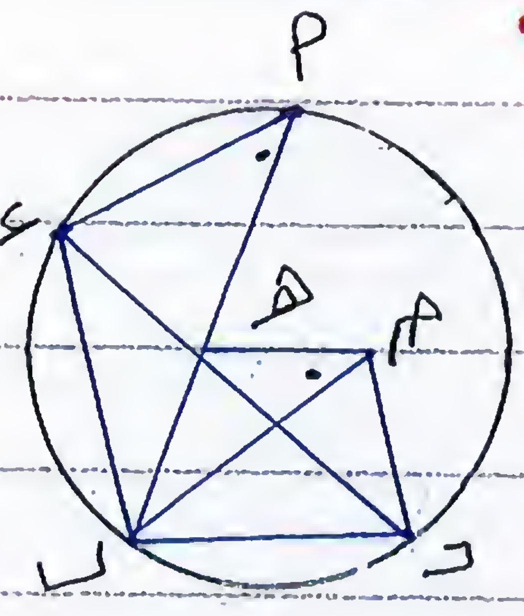
∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ج ص) (ثانياً)

∵ ق(∠م س أ) = 90°

وهي مرسومة على $\overline{أم}$

∴ $\overline{أم}$ قطر في الدائرة المارة برؤوس الشكل أ س ص م

٤



أب ، جـ د وتران في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{هـ\}$

ق(∠ب أ د) = ق(∠ب م هـ)

أثبت أن: ① الشكل م جـ ب هـ رباعي دائري

② ق(∠جـ هـ ب) = ٢ ق(∠جـ د ب)

الحل:

∵ ق(∠ب أ د) = ق(∠ب م هـ) ...... ① معطى

، ق(∠ب جـ د) = ق(∠ب أ د) ...... ② محيطيتان تحصران ب د

من ① ، ②

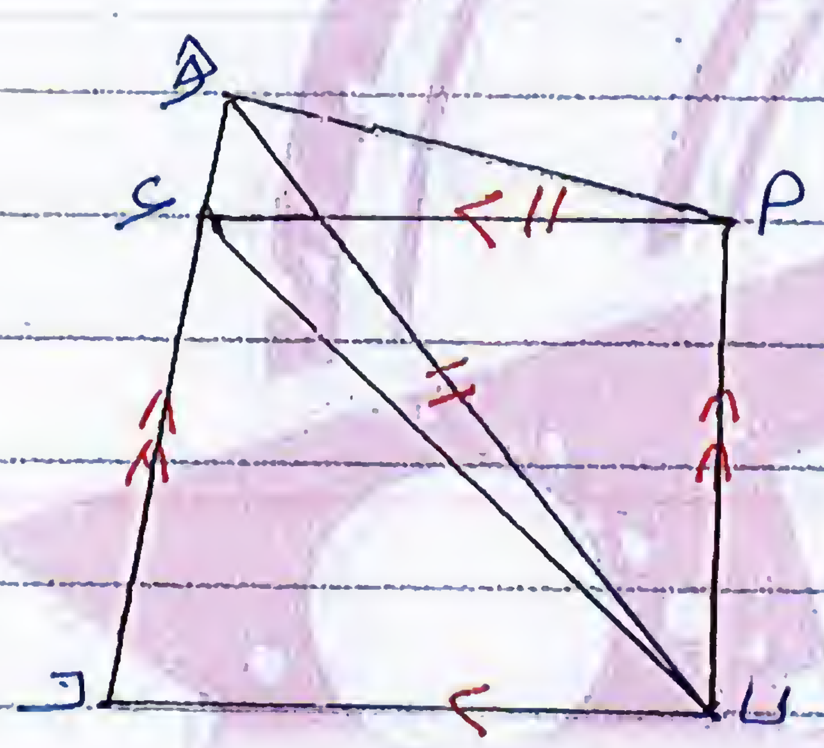
∴ ق(∠ب جـ هـ) = ق(∠ب م هـ) وهما مرسومتان على ب هـ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل م جـ ب هـ رباعي دائري

∴ ق(∠جـ م ب) = ق(∠جـ هـ ب) مرسومتان على ب جـ ...... ③

∵ ق(∠جـ م ب) = ٢ ق(∠جـ د ب) محيطية ومركزية تحصران ب جـ ...... ④

من ③ ، ④ ∴ ق(∠جـ هـ ب) = ٢ ق(∠جـ د ب)



في الشكل المقابل:

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، هـ ∈ $\overrightarrow{جـ د}$ حيث ب هـ = أ د

أثبت أن الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

الحل:

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) ...... ①

، أ د = ب جـ

∵ أ د = ب هـ معطى

∴ ب جـ = ب هـ

في △ ب جـ هـ ∵ ب جـ = ب هـ

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب هـ جـ) ...... ②

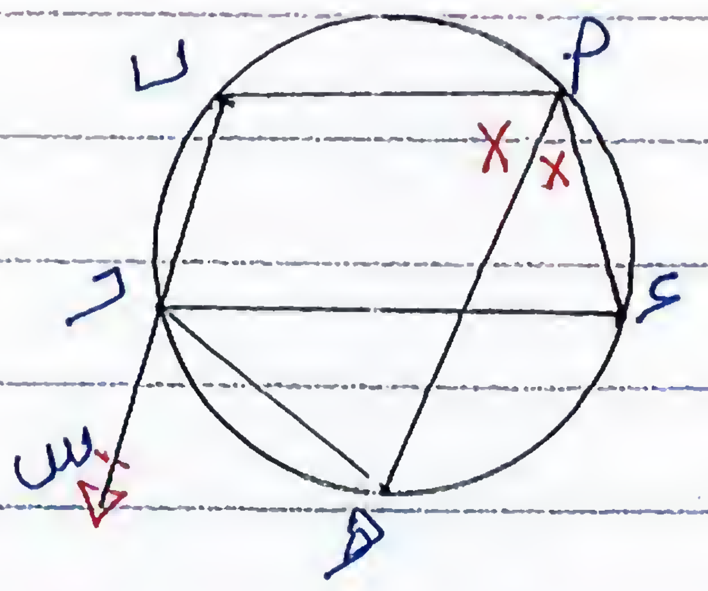
من ① ، ②

∴ ق(∠ب أ د) = ق(∠ب هـ د)

وهما مرسومتان على ب د وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

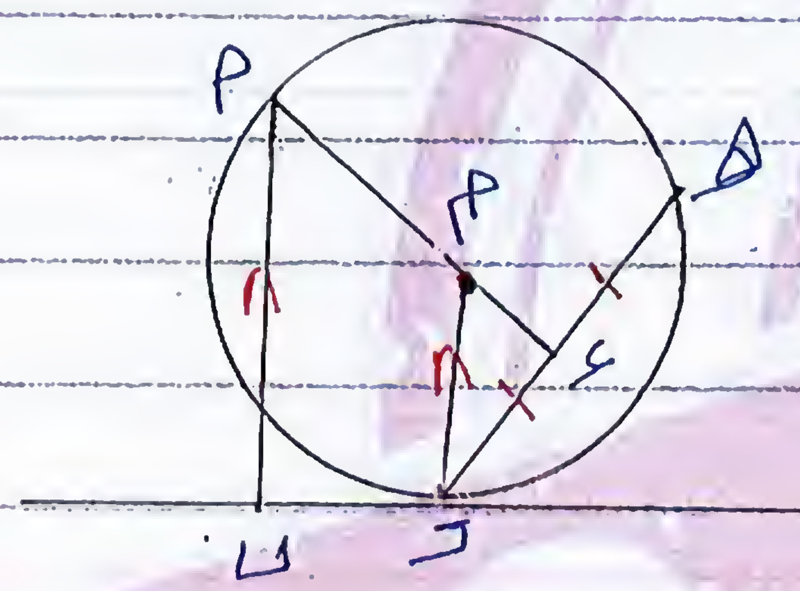
٤٦



أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة
$\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ أ ويلاقي الدائرة هـ
اثبت أن: $\overrightarrow{جـهـ}$ ينصف ∠ س جـ د

الحل

∵ الشكل أ ب جـ هـ رباعي دائري ∠ س جـ هـ خارجة عنه
∴ ق(∠ س جـ هـ) = ق(∠ ب أ هـ) ...... (1)
∵ ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ د جـ هـ) ...... (2) محيطيتان تحصران د هـ
∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ أ ∴ ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ هـ أ ب) ...... (3)
من (1)، (2)، (3) ∴ ق(∠ د جـ هـ) = ق(∠ هـ جـ س)
∴ $\overrightarrow{جـهـ}$ ينصف ∠ س جـ د



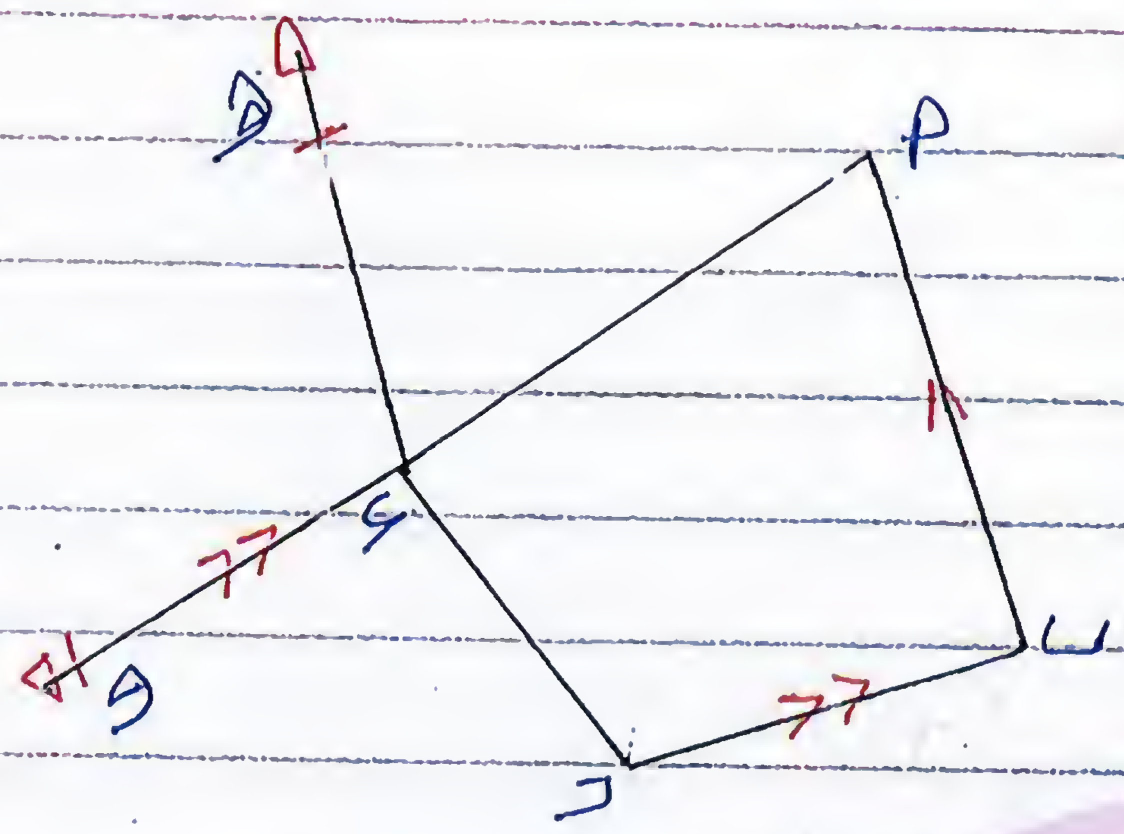
في الشكل المقابل:
م دائرة، ع منتصف $\overline{هـجـ}$
$\overleftrightarrow{بجـ}$ مماس للدائرة م عند جـ، $\overline{أب} // \overline{مجـ}$

اثبت أن الشكل أ ب جـ ع رباعي دائري

الحل

∵ ع منتصف $\overline{هـجـ}$ ∴ $\overline{مع} \perp \overline{هـجـ}$
∴ ق(∠ م ع جـ) = 90° ...... (1)
∵ $\overline{جـب}$ مماس للدائرة م عند جـ ∴ $\overline{مجـ} \perp \overline{بجـ}$
∴ ق(∠ م جـ ب) = 90°
∵ $\overline{أب} // \overline{مجـ}$
∴ ق(∠ أ ب جـ) + ق(∠ م جـ ب) = 180 بالتداخل
∴ ق(∠ أ ب جـ) = 180 − 90 = 90°
∵ ق(∠ أ ع جـ) + ق(∠ أ ب جـ) = 90 + 90 = 180°
وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري



٤٧

- في الشكل المقابل

$\overline{أب} // \overline{ده}$ ، $\overline{بج} // \overline{دو}$

ق(∠أده) + ق(∠جدو) = 180°

اثبت أن الشكل أبجد رباعي دائري

الحل

∵ $\overline{أب} // \overline{ده}$ ، $\overline{أد}$ قاطع لهما

∴ ق(∠بأد) = ق(∠أده) ...... ① (بالتبادل)

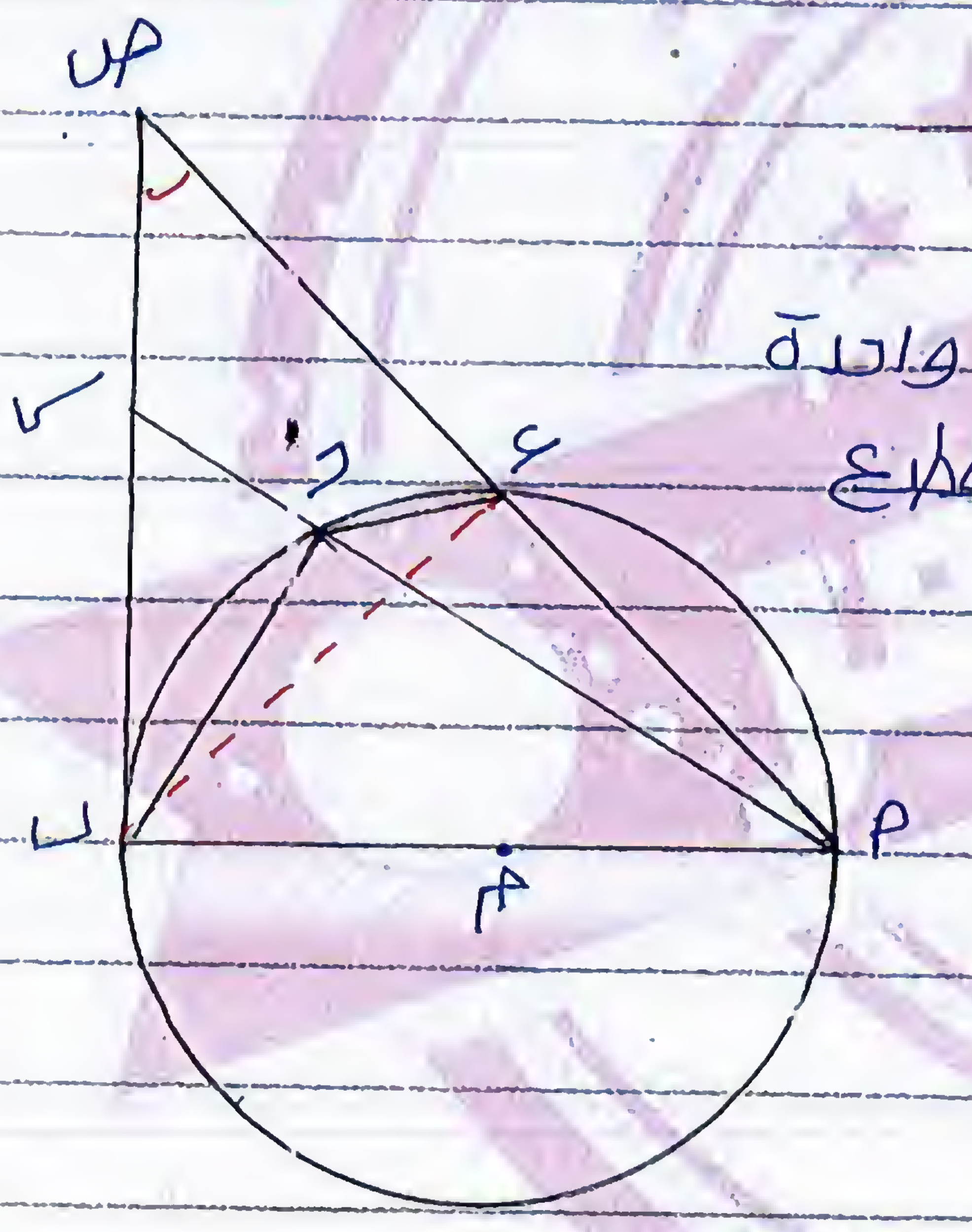
∵ $\overline{بج} // \overline{دو}$ ، $\overline{جد}$ قاطع لهما

∴ ق(∠بجد) = ق(∠جدو) ...... ② (بالتبادل)

∵ ق(∠أده) + ق(∠جدو) = 180° ...... ③ (معطى)

من ①، ②، ③ ∴ ق(∠بأد) + ق(∠بجد) = 180°

وهما متقابلتان ∴ الشكل أبجد رباعي دائري



في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{أج}$ ، $\overline{أد}$ وترات فيها وفي جهة واحدة

من $\overline{أب}$ رسم من ب مماس للدائرة فقطع $\overline{أج}$ في س وقطع

$\overline{أد}$ في ص

أثبت أن الشكل س ص د ج رباعي دائري

الحل العمل: نصل $\overline{بد}$

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أدب) = 90° محيطية في نصف دائرة

في △أدب القائم في د ∴ ∠دبأ تتمم ∠دأب

∵ ق(∠دجأ) = ق(∠دبأ) محيطتان تحصران $\overset{\frown}{أد}$

∴ ∠دأب تتمم ∠دجأ ...... ①

∵ $\overline{بص}$ مماس للدائرة م عند ب

∴ ق(∠أبص) = 90°

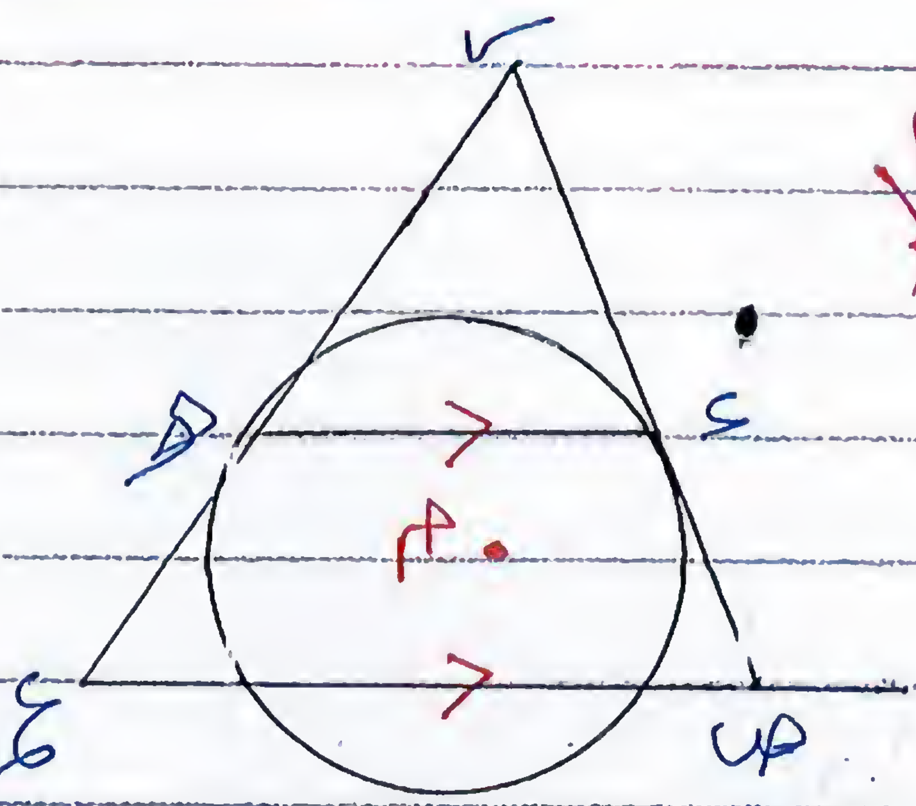
في △صأب القائم في ب

∴ ∠صأب تتمم ∠ص ...... ②

∴ ق(∠دجأ) = ق(∠ص)

وهي خارجة عن الشكل الرباعي س ص د ج

∴ الشكل س ص د ج رباعي دائري



(٤١)

في الشكل المقابل

سص ، سع تمسان الدائرة م عند د ، هـ

فإذا كانت دهـ // صع

اثبت أن الشكل د ص ع هـ رباعي دائري

الحل

∵ سص ، سع تمسان الدائرة عند د ، هـ

∴ س د = س هـ

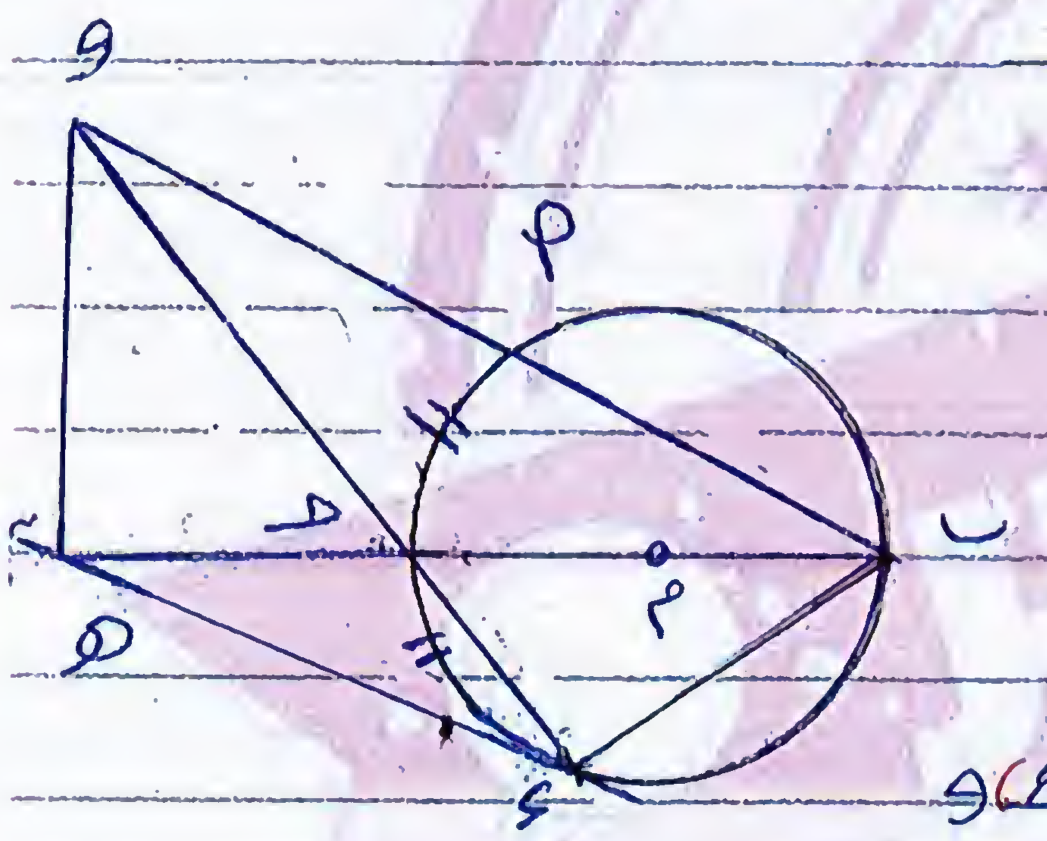
∴ ق(∠س د هـ) = ق(∠س هـ د) .... (١)

∵ دهـ // صع

∴ ق(∠س د هـ) = ق(∠ص) (بالتناظر) .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق(∠س هـ د) = ق(∠ص)

وهي خارجة عن الرباعي د ص ع هـ ∴ الشكل د ص ع هـ رباعي دائري



في الشكل المقابل الدائرة

ب جـ قطر في الدائرة م ، ق(⌒جـ أ) = ق(⌒جـ د)

د هـ مماس للدائرة عند د قطع ب جـ في هـ

د جـ ∩ ب أ = {و} برهن أن ب د هـ و رباعي دائري

ثم أوجد (١) ق(∠ب هـ و)

(٢) وضح أن ب و قطر للدائرة المارة بالنقط ب ، د ، هـ ، و

الحل

∵ ق(⌒د جـ) = ق(⌒جـ أ)

∴ ق(∠د ب جـ) = ق(∠جـ ب أ) .... (١) محيطتان تحصران د جـ ، جـ أ

∵ د هـ مماس للدائرة عند د

∴ ق(∠هـ د و) = ق(∠د ب هـ) .... (٢) محيطية ومماسية تحصران د جـ

من (١) ، (٢) ∴ ق(∠هـ د و) = ق(∠هـ ب و)

وهما مرسومتان على هـ و وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ب د هـ و رباعي دائري (أولاً)

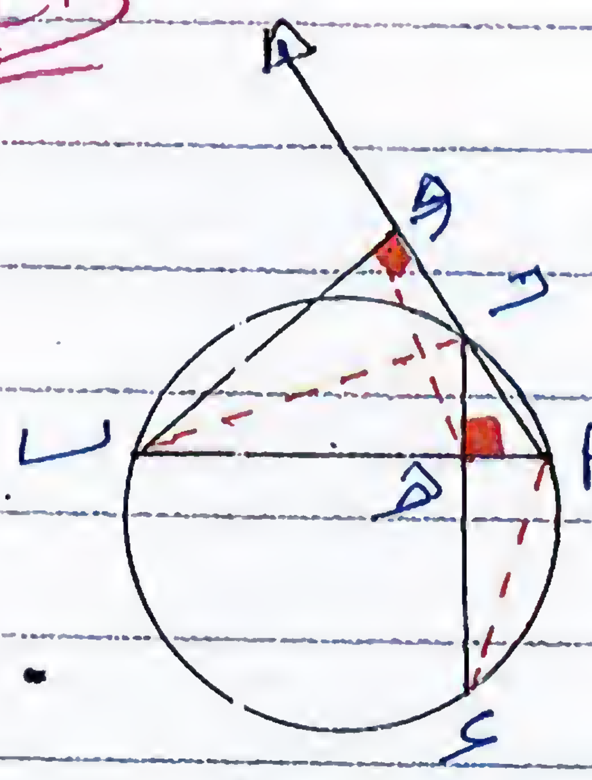
∵ ب جـ قطر في الدائرة م ∴ ق(∠ب د جـ) = ٩٠°

∵ ب د هـ و رباعي دائري ∴ ق(∠ب هـ و) = ق(∠ب د و) = ٩٠°

∵ ق(∠ب د و) = ٩٠° ∴ ∠ب د و مرسومة في نصف دائرة (ثانياً)

∴ ب و قطر في هذه الدائرة

(49)



أب ، جـ د وتران في دائرة متعامدان ومتقاطعان في هـ رسم ب و ⊥ $\overrightarrow{أ جـ}$ فقطعه في و ، و ∉ $\overline{أ جـ}$ أثبت أن

① الشكل و جـ هـ ب رباعي دائري

② ق(∠ب و هـ) = ق(∠ب أ د) (الجيزة ٢٠١٦)

الحل

∵ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{جـ د}$ ∴ ق(∠أ هـ جـ) = ٩٠°

∵ $\overline{ب و}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ∴ ق(∠أ و ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ هـ جـ) = ق(∠جـ و ب) = ٩٠°

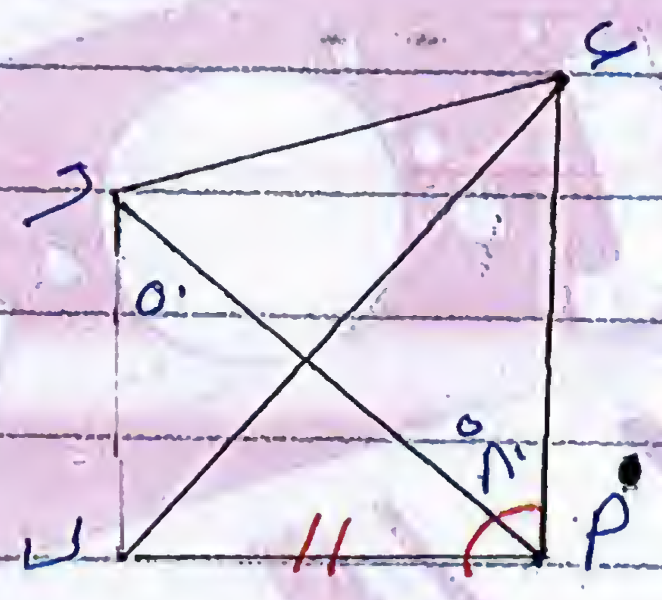
وهي خارجة عن الرباعي جـ هـ ب و

∴ الشكل جـ هـ ب و رباعي دائري (أولاً)

∴ ق(∠ب و هـ) = ق(∠ب جـ هـ)

∵ ق(∠ب جـ د) = ق(∠ب أ د) محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{ب د}$

∴ ق(∠ب و هـ) = ق(∠ب أ د) (ثانياً)



في الشكل المقابل

أب = أد ، ق(∠د أ ب) = ٨٠° ، ق(∠أ جـ ب) = ٥٠°

أثبت أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

الحل

في Δ أ ب د ∵ أد = أب

∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠أ ب د) = $\frac{١٨٠ - ٨٠}{٢}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°

∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠أ جـ ب) = ٥٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{أب}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

العلاقة بين مماسات الدائرة

* المماسات المرسومات من نهايتى قطر فى الدائرة متوازيات

* المماسات المرسومات من نهايتى وتر فى الدائره متقاطعات

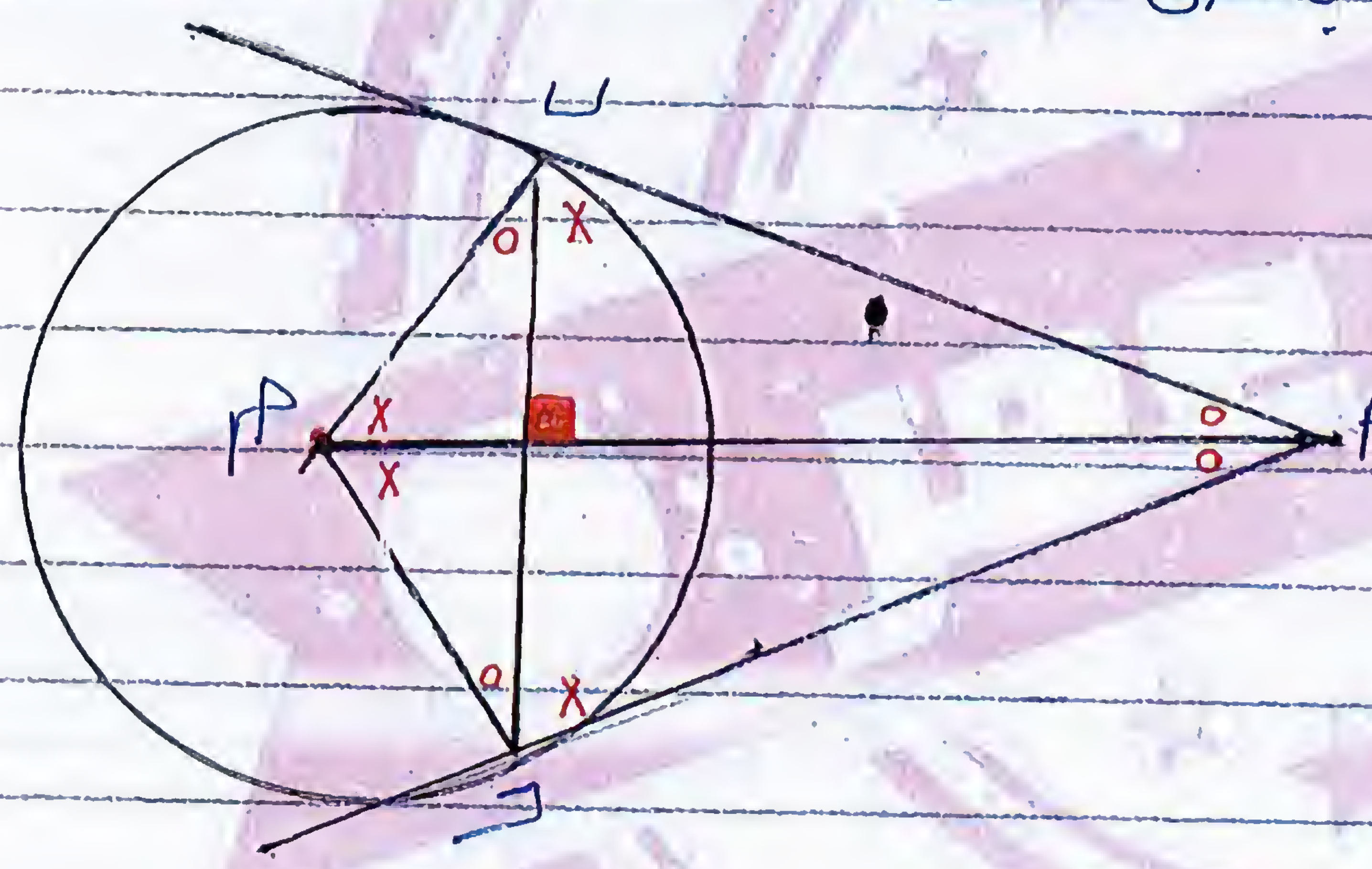
نظرية (٤)

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارجه دائرة متساويتان فى الطول

نتائج هامة

① المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها خارج الدائرة يكون محوراً لوتر التماس لهذين المماسين

② المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس.



أى أن

إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أج}$ مماسان للدائره م عند ب ، ج فإن

① أب = أج

② $\overleftrightarrow{أم} \perp \overline{ب ج}$

③ ق($\angle$ب أ م) = ق($\angle$ج أ م)

④ ق($\angle$أ م ب) = ق($\angle$أ م ج)

⑤ الشكل أ ب م ج رباعى دائرى

لأن ق($\angle$أ ب م) = ق($\angle$أ ج م) = 90° (المماس عمودى على نصف القطر المرسوم من نقطه التماس)

⑥ ق($\angle$ب أ م) = ق($\angle$ب ج م) مرسومتان على $\overline{ب م}$

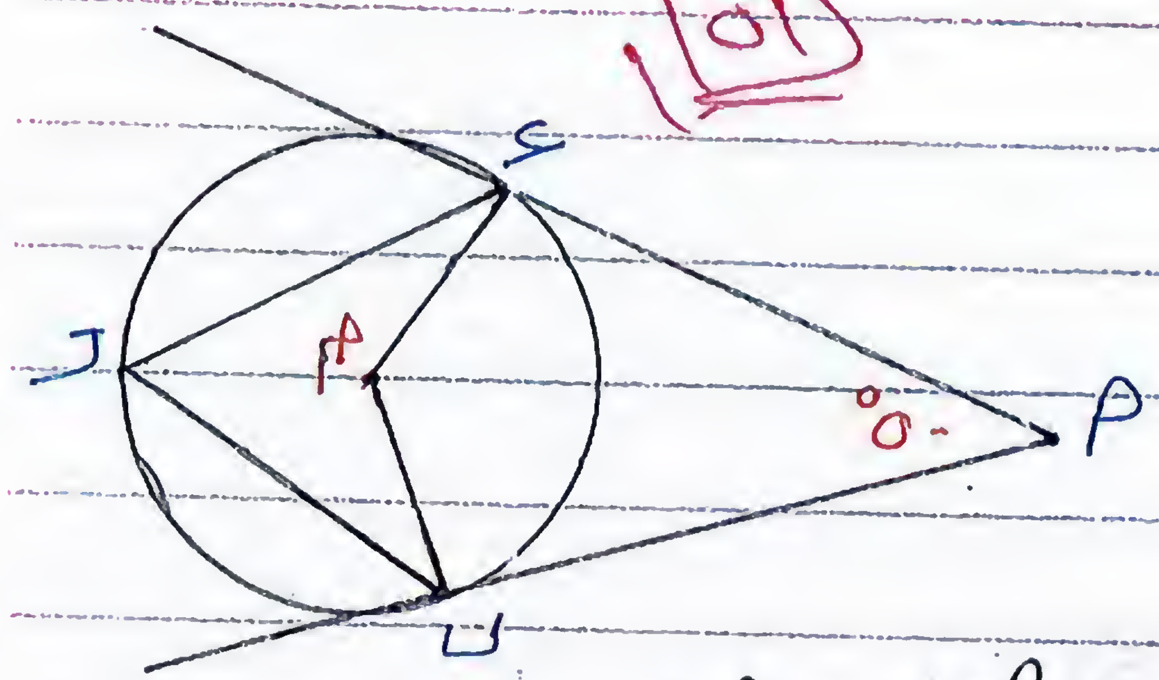
⑦ ق($\angle$أ ب ج) = ق($\angle$أ م ج) مرسومتان على $\overline{أ ج}$

⑧ $\triangle$ أ ب ج متساوى الساقين (أب = أج)

⑨ $\triangle$ م ب ج متساوى الساقين (م ب = م ج = نق)

(٥١)

العلاقة بين مماسات الدائرة



في الشكل المقابل

$\overline{أء}$ ، $\overline{أب}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، ق(∠أ) = 50°

(1) أثبت أن الشكل أ ء م ب رباعي دائري

(2) أوجد ق(∠ء م ب) ، ق(∠ء جـ ب)

الحل

∵ $\overline{أء}$ مماس للدائرة م عند ء ∴ $\overline{مء} \perp \overline{أء}$ ∴ ق(∠أ ء م) = 90°

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة م عند ب ∴ $\overline{مب} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠أ ب م) = 90°

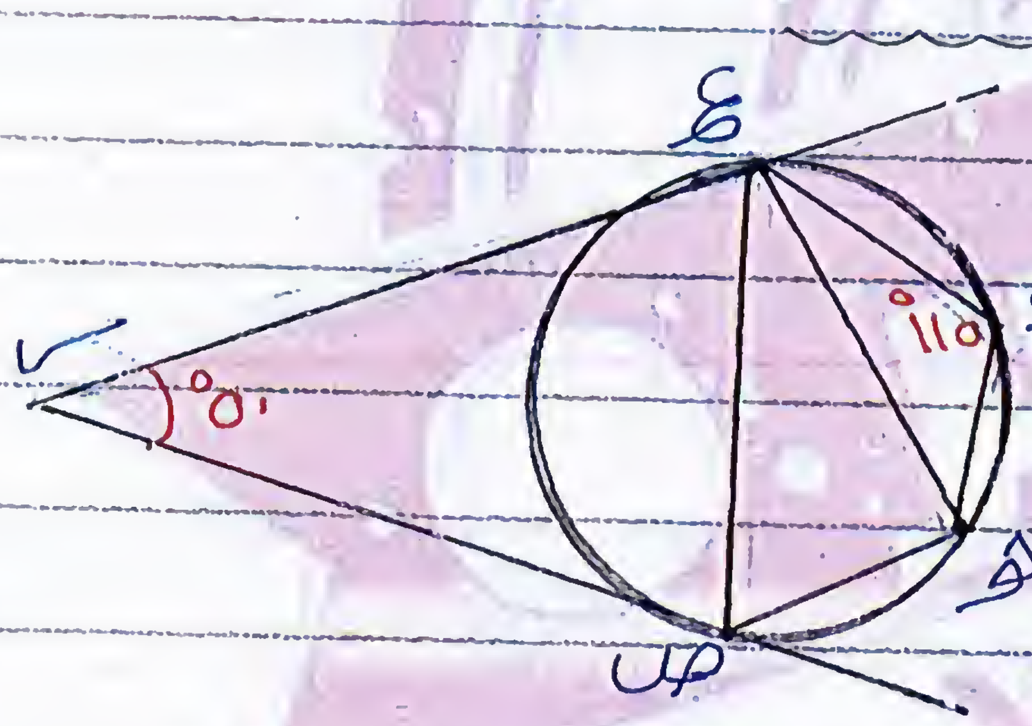
∵ ق(∠أ ب م) + ق(∠أ ء م) = 90 + 90 = 180° وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب م ء رباعي دائري (أولاً)

∴ ق(∠أ) + ق(∠ء م ب) = 180°

∴ ق(∠ء م ب) = 180 − 50 = 130° (ثانياً)

∴ ق(∠ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ء م ب) = 65° محيطية ومركزية تحصران نفس القوس (ثالثاً)



في الشكل المقابل

$\overline{سص}$ ، $\overline{سع}$ مماسان للدائرة عند ص ، ع

ق(∠ص س ع) = 50° ، ق(∠هـ ء ع) = 115°

أثبت أن (1) $\overline{صع}$ ينصف ∠ هـ ص س (2) $\overline{سع}$ // $\overline{صهـ}$

الحل

∵ $\overline{سع}$ ، $\overline{سص}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ س ع = س ص

في △ س ص ع ∵ س ع = س ص ∴ ق(∠ع ص س) = ق(∠س ع ص) = $\frac{180 - 50}{2}$ = 65°

∵ الشكل ء هـ ص ع رباعي دائري

∴ ق(∠ء) + ق(∠هـ ص ع) = 180° (متقابلتان)

∴ ق(∠هـ ص ع) = 180 − 115 = 65°

∵ ق(∠هـ ص ع) = ق(∠ع ص س) = 65°

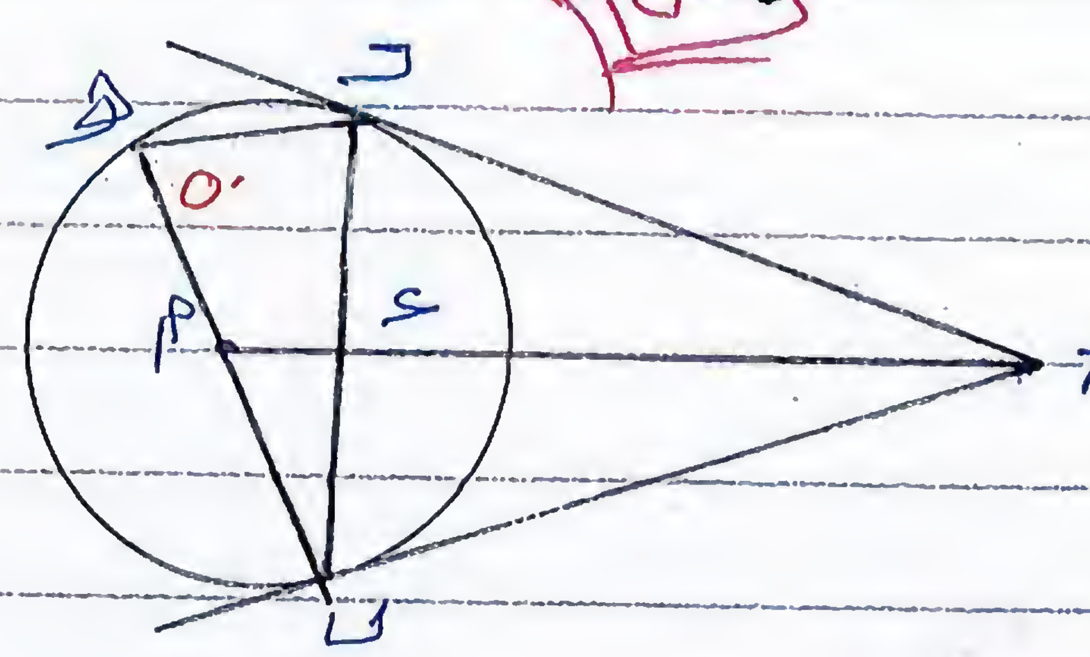
∴ $\overline{صع}$ ينصف ∠ هـ ص س (أولاً)

∴ ق(∠هـ ص ع) = ق(∠ص ع س) = 65° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{سع}$ // $\overline{صهـ}$

١٠٥

العلاقة بين مماسات الدائرة



في الشكل المقابل :

$\overline{بهـ}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ ، $\overline{أم} \cap \overline{بجـ} = \{ء\}$

ق(∠ب هـ جـ) = ٥٠°

أوجد ق(∠أ) ، أثبت أن $\overline{هـجـ} // \overline{أم}$

الحل

∵ $\overline{أجـ}$ مماس للدائرة م عند جـ

∴ ق(∠أجـب) = ق(∠جـهـب) = ٥٠° مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{بجـ}$

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان

∴ أب = أجـ ∴ ق(∠أبجـ) = ق(∠أجـب)

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٥٠ + ٥٠) = ٨٠° (أولاً)

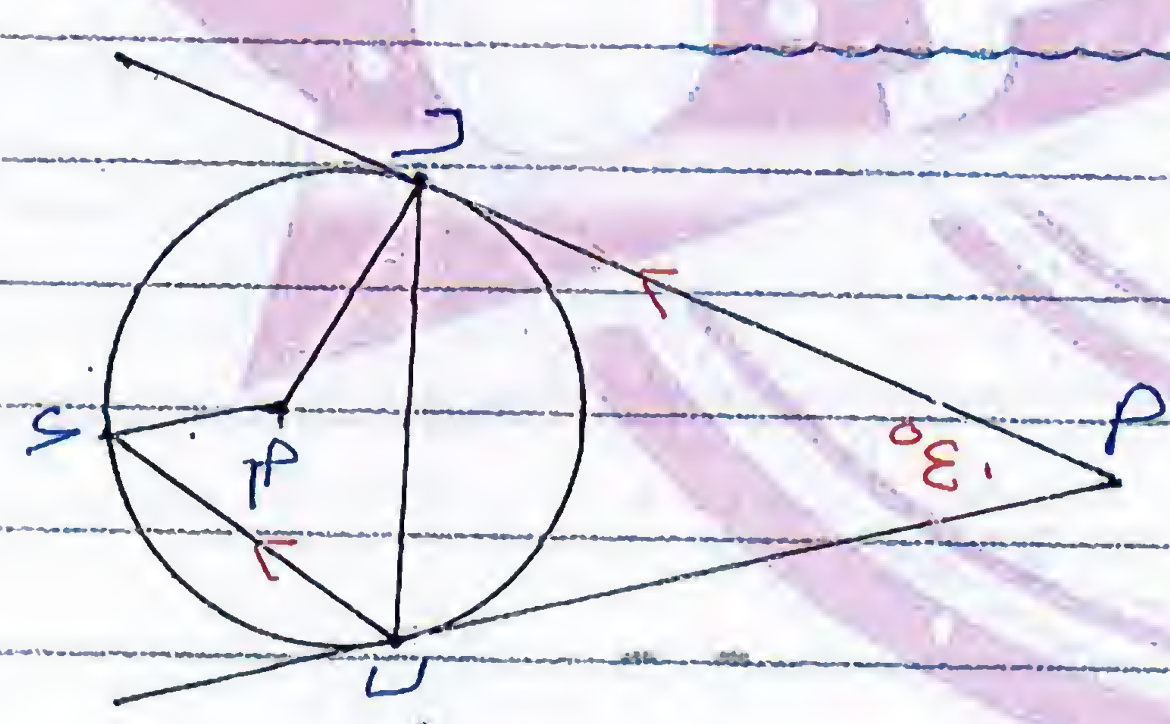
∵ $\overline{بهـ}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠بجـهـ) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ $\overleftrightarrow{أم} \perp \overline{بجـ}$ ∴ ق(∠أءجـ) = ٩٠°

∴ ق(∠أءجـ) = ق(∠هـجـء) = ٩٠° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{جـهـ} // \overline{أم}$



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م ، $\overleftrightarrow{بء} // \overleftrightarrow{أجـ}$

، ق(∠بأجـ) = ٤٠°

① أوجد ق(∠أجـب) ، ق(∠جـمء)

② اثبت أن $\overrightarrow{بجـ}$ ينصف ∠أبء

الحل

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان

∴ ق(∠أبجـ) = ق(∠أجـب) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∵ $\overline{أجـ} // \overline{بء}$

∴ ق(∠أجـب) = ق(∠جـبء) = ٧٠° بالتبادل

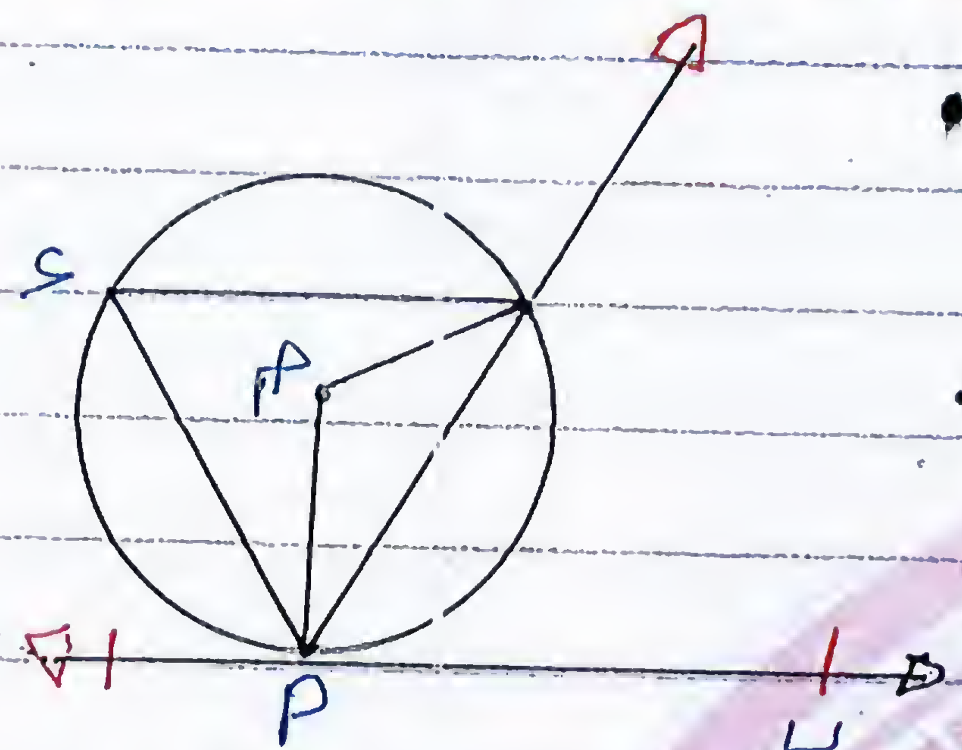
∴ ق(∠جـمء) = ٢ ق(∠جـبء) = ١٤٠° محيطية ومركزية تحصران $\overset{\frown}{جـء}$

∴ $\overrightarrow{بجـ}$ ينصف ∠أبء

٥٣

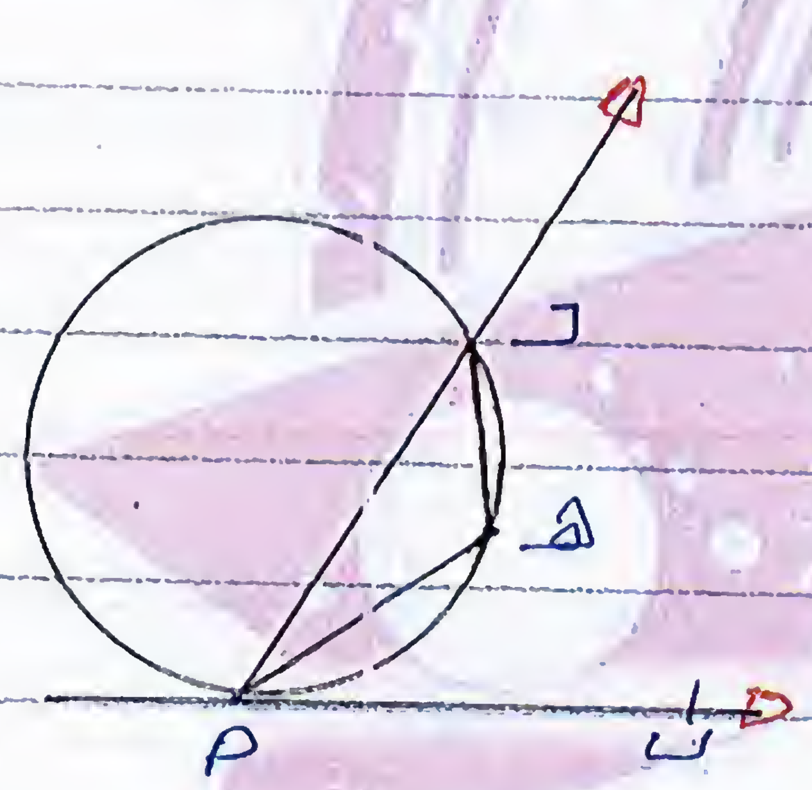
* الزاوية المماسية *

هي الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والآخر يحتوي وترًا في الدائرة مارًا بنقطة التماس



نظرية (٥)
قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

نتيجة (١)
قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس



أي أن في الشكل المقابل:

ق(∠ب أ جـ) المماسية = ق(∠د) (المحيطية)

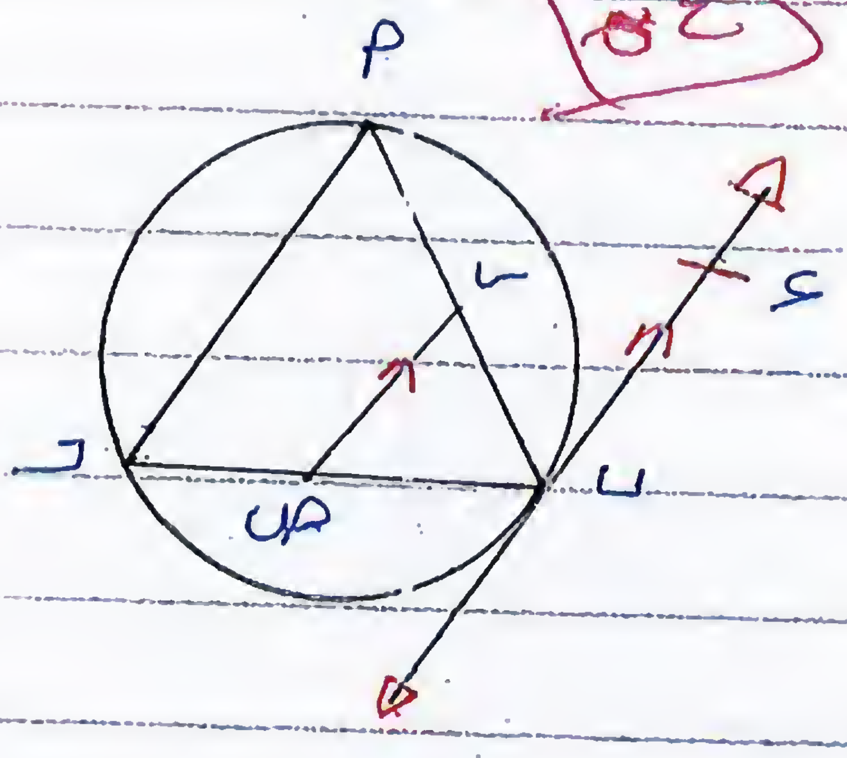
ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م جـ) (المركزية)

ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$)

ق(∠ب أ جـ) + ق(∠أ هـ جـ) = $180°$

٥٤

* الزاوية المماسية *



في الشكل المقابل

أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة عند ب ، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب ج}}$

حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

اثبت أن الشكل أ س ص ج رباعي دائري

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة عند ب

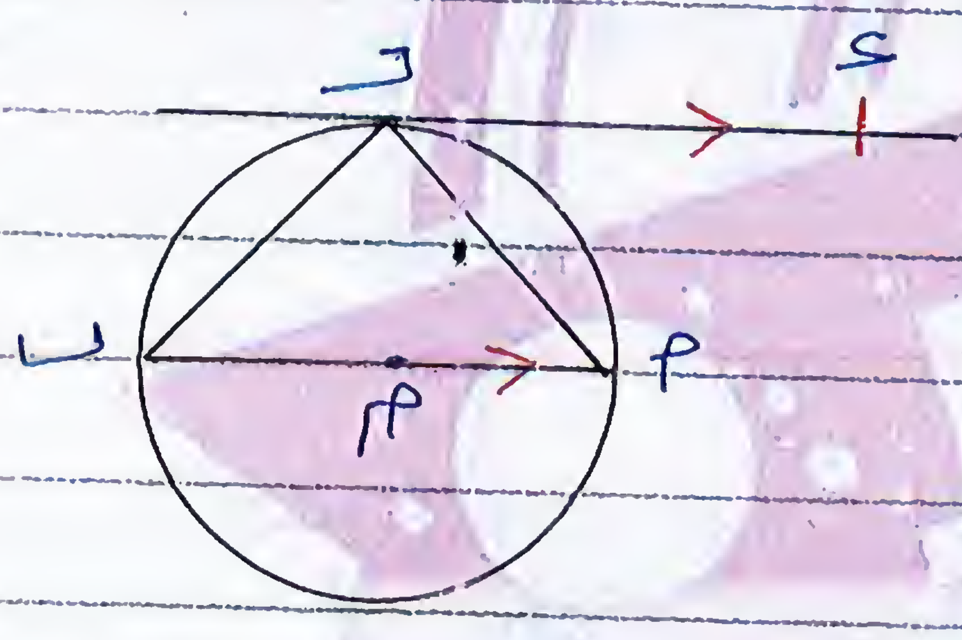
∴ ق(∠ ء ب أ) = ق(∠ ب ج أ) ...... ① مماسية ومحيطية تحصران $\overparen{\text{ب أ}}$

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ ء ب أ) = ق(∠ ب س ص) بالتبادل ...... ②

من ① ، ② ∴ ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ب ج أ)

∴ وهي خارجة عن الرباعي أ س ص ج ∴ الشكل أ س ص ج رباعي دائري



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة محيطها ٤٤ سم ، $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ مماس لها عند ج ، $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$

أوجد مع البرهان ① ق(∠ ء ج أ) ② طول $\overparen{\text{أ ج}}$

البرهان:

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠ أ ج ب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

، $\overline{\text{ج ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ج}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ ء ج أ) = ق(∠ ج أ ب) بالتبادل ...... ①

∵ $\overleftrightarrow{\text{ج ء}}$ مماس للدائرة عند ج

∴ ق(∠ ء ج أ) = ق(∠ أ ب ج) مماسية ومحيطية تحصران $\overparen{\text{أ ج}}$ ...... ②

من ① ، ②

∴ ق(∠ ج أ ب) = ق(∠ ج ب أ) = $\frac{١٨٠ - ٩٠}{٢}$ = ٤٥°

∴ ق(∠ ء ج أ) = ٤٥° أولاً

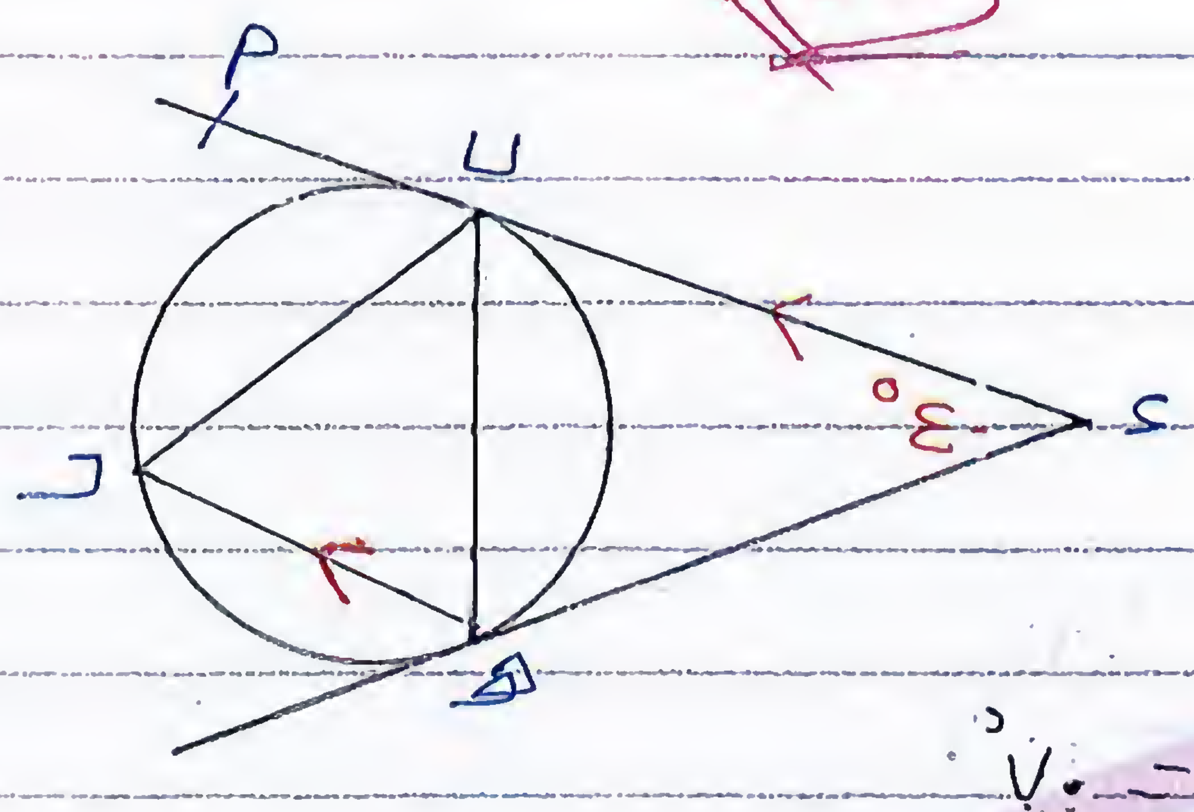
∴ ق($\overparen{\text{أ ب}}$) = ٢ ق(∠ ج) = ٩٠°

∴ طول $\overparen{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{ق}(\overparen{\text{أ ب}})}{٣٦٠}$ × محيط الدائرة = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٤٤ = ١١ سم

٥٥

* الزاوية المماسية *

مثال ① في الشكل المقابل



دب ، ده مماسان للدائرة عند ب ، هـ

دب // هـ جـ ، ق(∠د) = ٤٠° أوجد ق(∠أ ب جـ)

الحل

∵ دب ، ده قطعتان مماستان

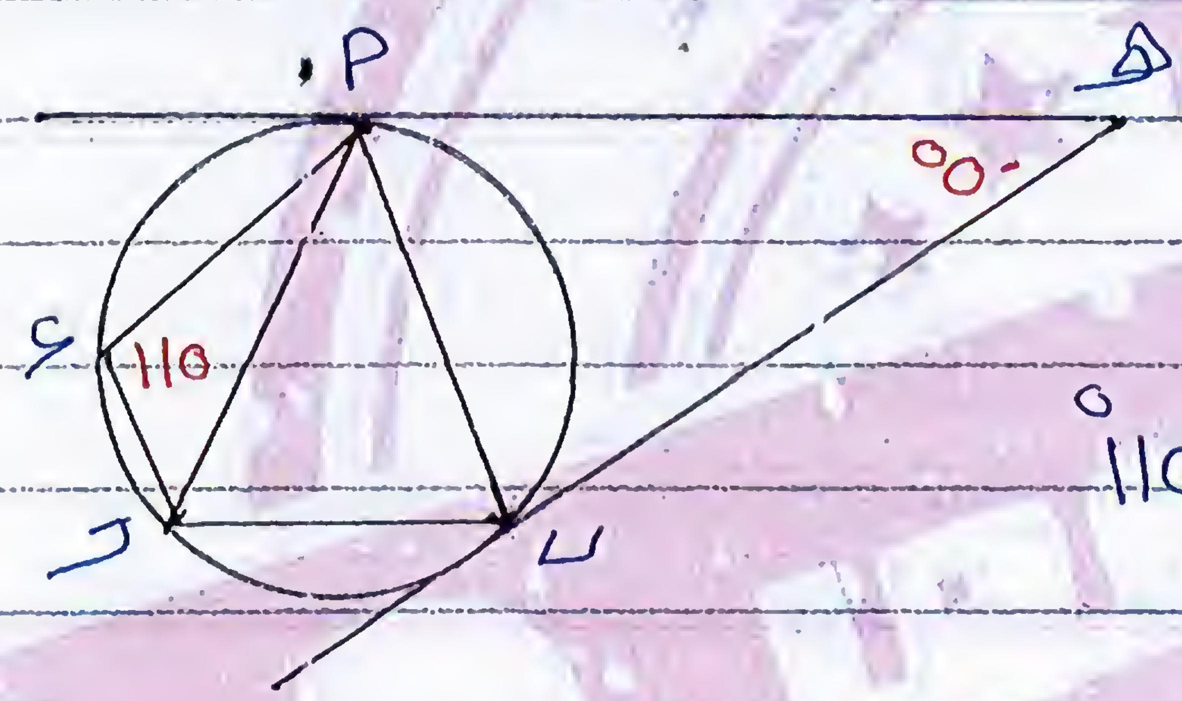
∴ دب = ده

∴ ق(∠د ب هـ) = ق(∠د هـ ب) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∵ دب // هـ جـ ∴ ق(∠جـ هـ ب) = ق(∠د ب هـ) = ٧٠° بالتبادل

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ب هـ جـ) = ٧٠° محيطية ومماسية تحصران ب جـ

مثال ② في الشكل المقابل



أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ،

هـ أ ، هـ ب مماسان للدائرة عند أ ، ب

فإذا كان ق(∠أ هـ ب) = ٥٠° ، ق(∠أ د جـ) = ١١٥°

اثبت أن أب = أجـ ، هـ أ // ب جـ

الحل

∵ هـ أ ، هـ ب قطعتان مماستان للدائرة

∴ هـ أ = هـ ب

∴ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠هـ ب أ) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = $\frac{١٣٠}{٢}$ = ٦٥°

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠هـ أ ب) = ٦٥° محيطية ومماسية تحصران أب

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠أ ب جـ) + ق(∠أ د جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠ - ١١٥ = ٦٥°

في △أ ب جـ ∵ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ب جـ) = ٦٥°

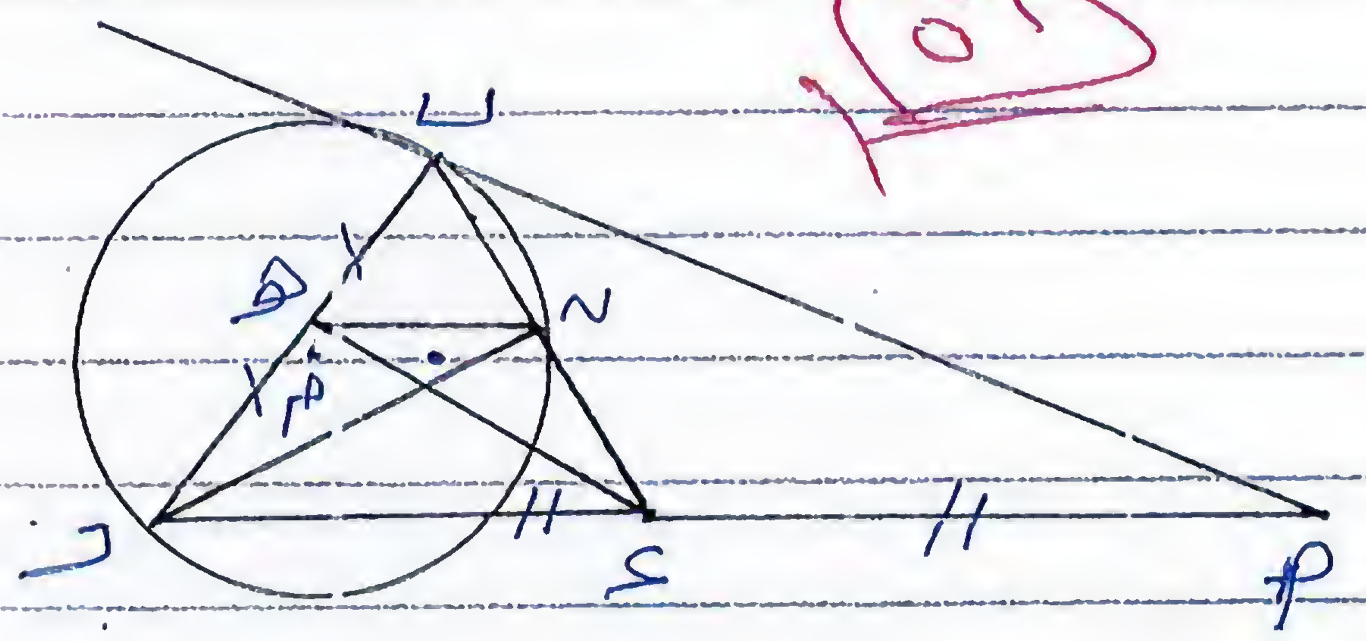
∴ أب = أجـ (أولاً)

∵ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠أ ب جـ) = ٦٥° وهما في وضع تبادل

∴ هـ أ // ب جـ (ثانياً)

٥٦

* الزاوية المماسية *



في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ مماس للدائرة م ، $\overline{أجـ}$ قاطع لها

د منتصف $\overline{أجـ}$ ، هـ منتصف $\overline{بجـ}$

اثبت أن: (1) $\overline{أب} \parallel \overline{دهـ}$

(2) الشكل ن د جـ هـ رباعي دائري

الحل

في △ أ ب جـ

∵ د منتصف $\overline{أجـ}$ ، هـ منتصف $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{أب} \parallel \overline{دهـ}$ (أولاً)

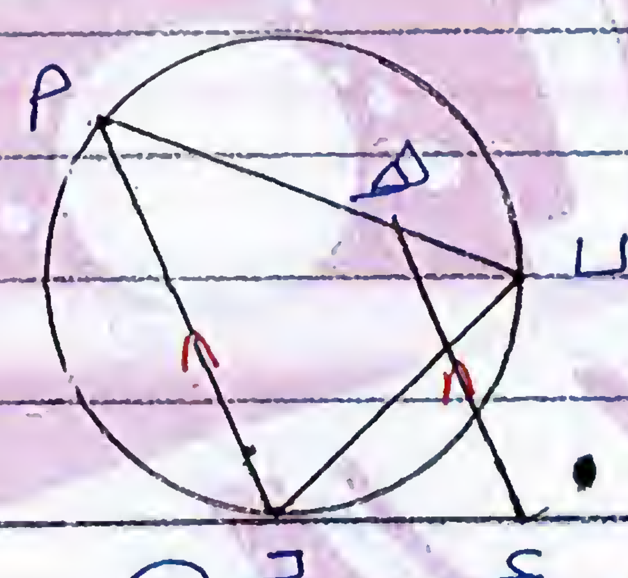
∵ $\overline{أب} \parallel \overline{دهـ}$ ∴ ق(∠أ ب د) = ق(∠ب د هـ) ...... (1) بالتبادل

∵ ق(∠أ ب ن) = ق(∠ب جـ ن) ...... (2) مماسية ومحيطية تحصران ⌒ب ن

من (1) (2) ∴ ق(∠ن د هـ) = ق(∠ن جـ هـ)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ن د جـ هـ رباعي دائري



في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

$\overleftrightarrow{جـد}$ مماس للدائرة عند جـ ، رسم $\overline{دهـ} \parallel \overline{أجـ}$

تقطع $\overline{أب}$ في هـ : اثبت أن ب هـ جـ د رباعي دائري

الحل

∵ $\overleftrightarrow{جـد}$ مماس للدائرة عند جـ

∴ ق(∠ب جـ د) = ق(∠ب أ جـ) ...... (1) مماسية ومحيطية تحصران ⌒ب جـ

∵ $\overline{دهـ} \parallel \overline{أجـ}$

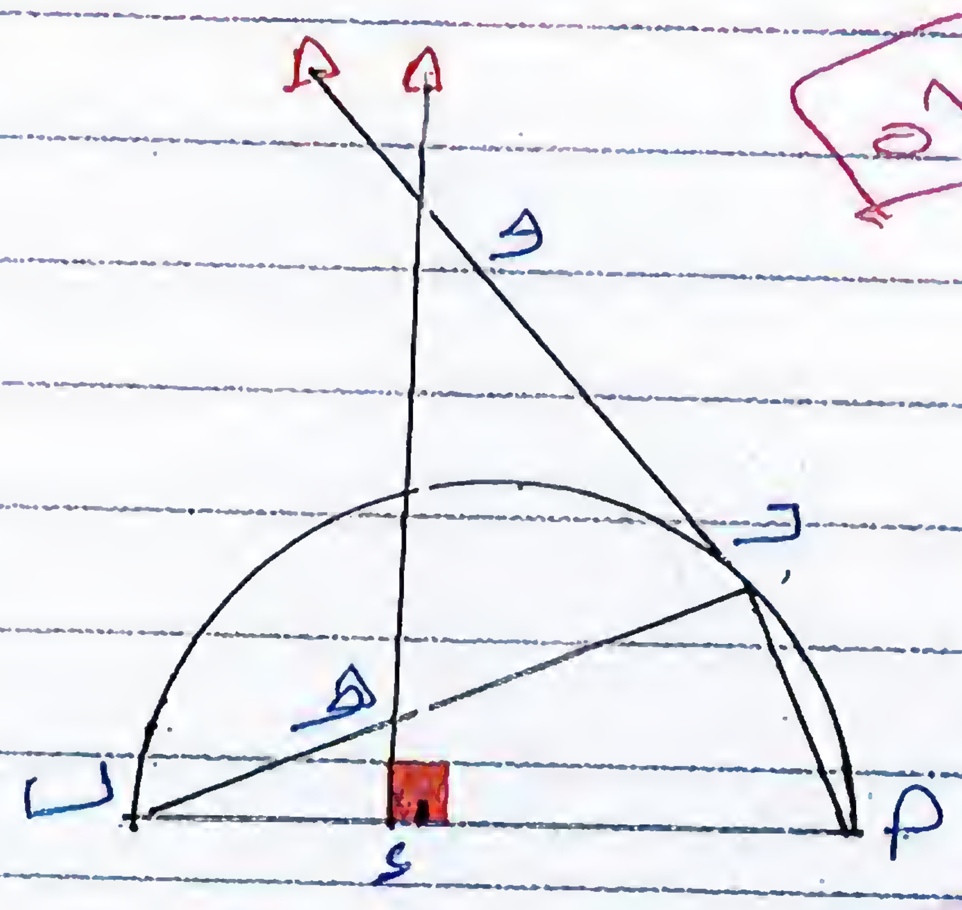
∴ ق(∠ب هـ د) = ق(∠ب أ جـ) ...... (2) بالتناظر

من (1) ، (2) ∴ ق(∠ب هـ د) = ق(∠ب جـ د)

وهما مرسومتان على $\overline{بد}$ وفي جهة واحدة منها

٥٧

* الزاوية المماسية *



أب قطر في نصف دائرة، جـو مماس لها عند جـ ، ءو ⊥ أب

① برهن أن: الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

② برهن أن: Δ و جـ هـ متساوي الساقين

③ حدد مركز الدائرة المار برؤوس الشكل أ ء هـ جـ .

الحل

∵ أب قطر ∴ ق(∠أجـب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة ①

∵ ءو ⊥ أب ∴ ق(∠أءهـ) = ٩٠° ②

من ① و ② ∴ ق(∠أءهـ) + ق(∠أجـهـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

وهما متقابلتان ∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري (أولاً)

∵ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

∴ ق(∠وهـجـ) = ق(∠جـأء) خارجة عن الرباعي الدائري ③

∵ جـو مماس للدائرة عند جـ

∴ ق(∠وجـهـ) = ق(∠جـأء) مماسية ومحيطية ④

من ③ و ④

∴ ق(∠وجـهـ) = ق(∠وهـجـ)

∴ Δ و جـ هـ متساوي الساقين (ثانياً)

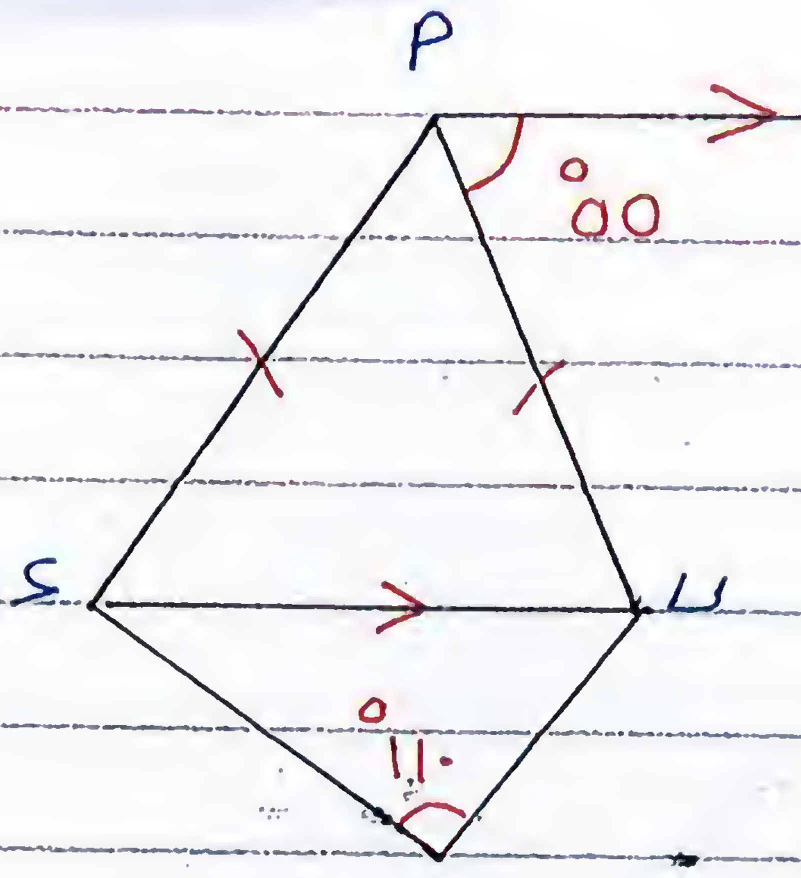
∵ ق(∠أجـهـ) = ٩٠°

∴ ∠أجـهـ محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ أهـ قطر في هذه الدائرة

∴ مركز الدائرة المار بالنقط أ ء هـ جـ يقع منتصف أهـ

١٥



عكس نظرية (٥)

٥٨

في الشكل المقابل: $\overrightarrow{أهـ} \parallel \overline{ب د}$

ق(∠هـ أ ب) = ٥٥° ، ق(∠ج) = ١١٠° ، أب = أد

أثبت أن ① الشكل أ ب ج د رباعي دائري

② أهـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب ج د

الحل

∵ أهـ // ب د ، أب قاطع لهما

∴ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠أ ب د) = ٥٥° بالتبادل

في Δ أ ب د ∵ أب = أد

∴ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ د ب) = ٥٥°

∴ ق∠ب أ د = ١٨٠ − (٥٥ + ٥٥) = ٧٠°

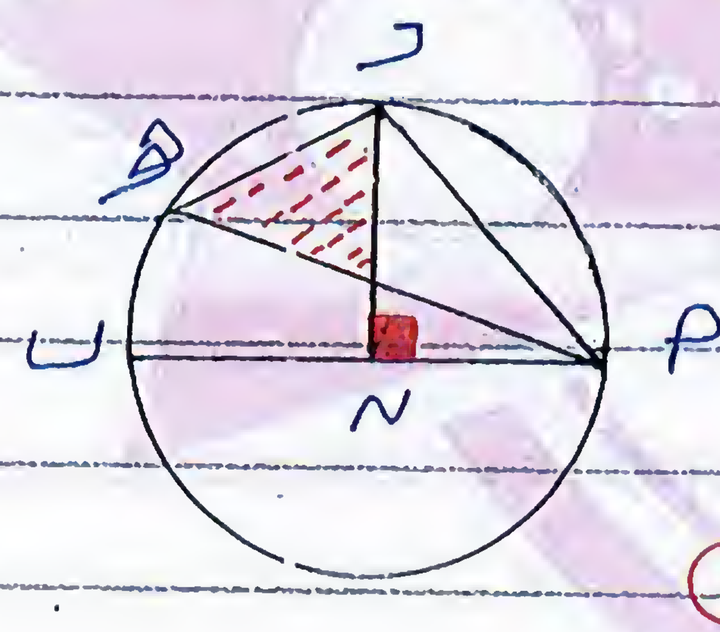
في الشكل أ ب ج د

∵ ق(∠ج) + ق(∠ب أ د) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري (أولاً)

② ∵ ق∠هـ أ ب = ق∠أ د ب = ٥٥°

∴ أهـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب ج د.



أب قطر في الدائرة م ، مج ⊥ أب ، د ∈ مج

رسم أد فقطع الدائرة في هـ

أثبت أن أج مماس للدائرة الخارجة عن Δ ج د هـ

الحل

∵ ق(∠أ هـ ج) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م ج) = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥° ...... ①

محيطية ومركزية تحصران أج

في Δ أ م ج ∵ م أ = م ج = نق

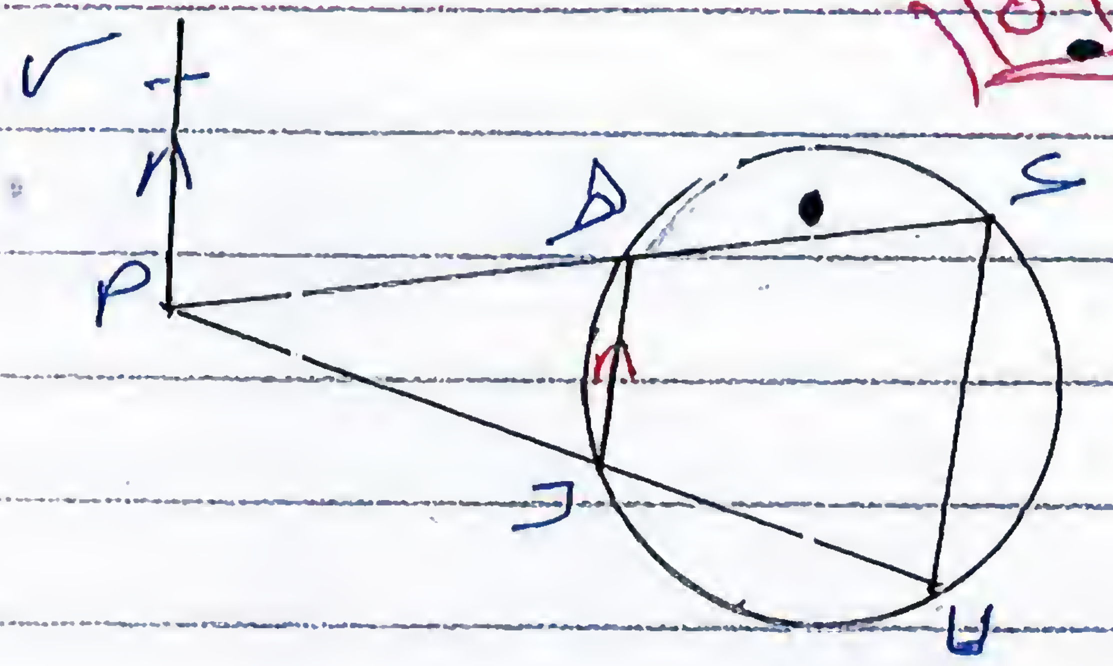
∴ ق∠م ج أ = $\frac{١٨٠ - ٩٠}{٢}$ = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥° ...... ②

من ①، ②

∴ ق(∠أ ج م) = ق(∠أ هـ ج) = ٤٥°

∴ أج مماس للدائرة الخارجة عن Δ ج د هـ

عكس نظرية (٥) ٥٩



في الشكل المقابل

ب ج هـ د رباعي دائري

د هـ ∩ ب ج = {أ}، أ س // ج هـ

برهن أن: أ س مماس للدائرة المار برؤوس Δ أ ب د

الحل

∵ أ س // ج هـ

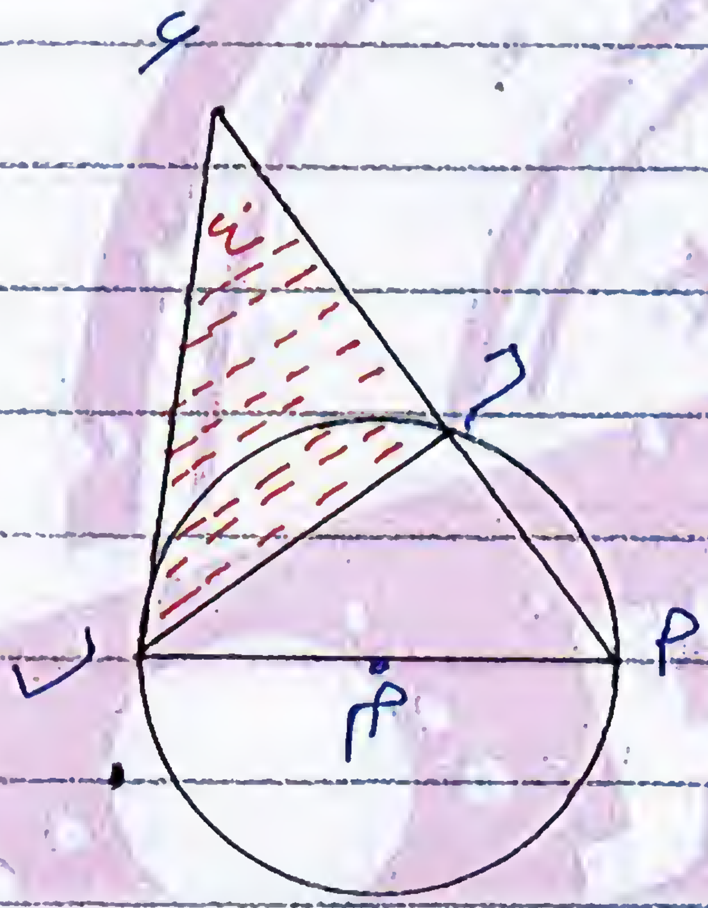
∴ ق(∠س أ هـ) = ق(∠أ هـ ب) بالتبادل ...... (١)

∵ د ب ج هـ رباعي دائري

∴ ق(∠أ هـ ج) = ق(∠د ب ج) خارجة عن الرباعي الدائري ...... (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق(∠س أ هـ) = ق(∠ب)

∴ أ س مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب د



أ ب قطر في الدائرة م، أ ج وتر فيها

رسم ب د مماساً يقطع أ ج في د

ق(∠ج د ب) = ٤٠°

اثبت أن: أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ج ب د

البرهان:

∵ أ ب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ ج ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∵ ب د مماساً للدائرة م في ب

∴ ق(∠أ ب د) = ٩٠°

في Δ أ ب د القائم في ب

ق(∠أ) = ١٨٠ − ٩٠ + ٤٠ = ٥٠°

في Δ أ ب ج القائم في ج

ق(∠أ ب ج) = ١٨٠ − ٩٠ + ٥٠ = ٤٠°

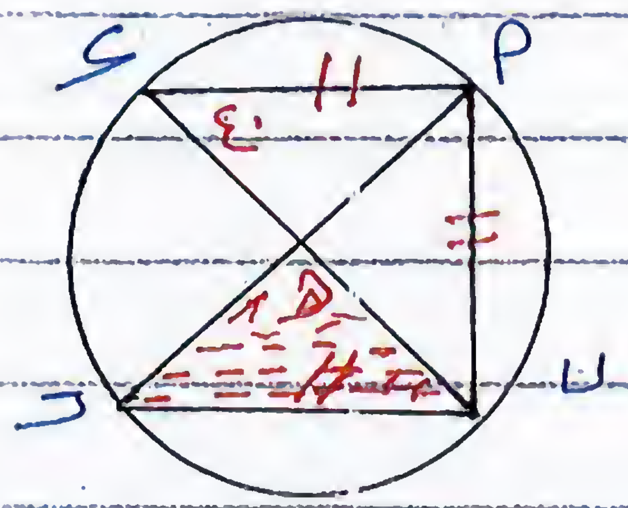
∴ ق(∠أ ب ج) = ق(∠د) = ٤٠°

∴ أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ج ب د

عكس نظرية (٥)

٦٠

في الشكل المقابل :-



ق(∠أدب) = ٤٠° ، أد = أب

① أوجد : ق(∠أجب)

② أثبت أن : أب مماسة للدائرة المارة بالنقط ب ، هـ ، ج

الحل

في △ أبد ∵ أد = أب

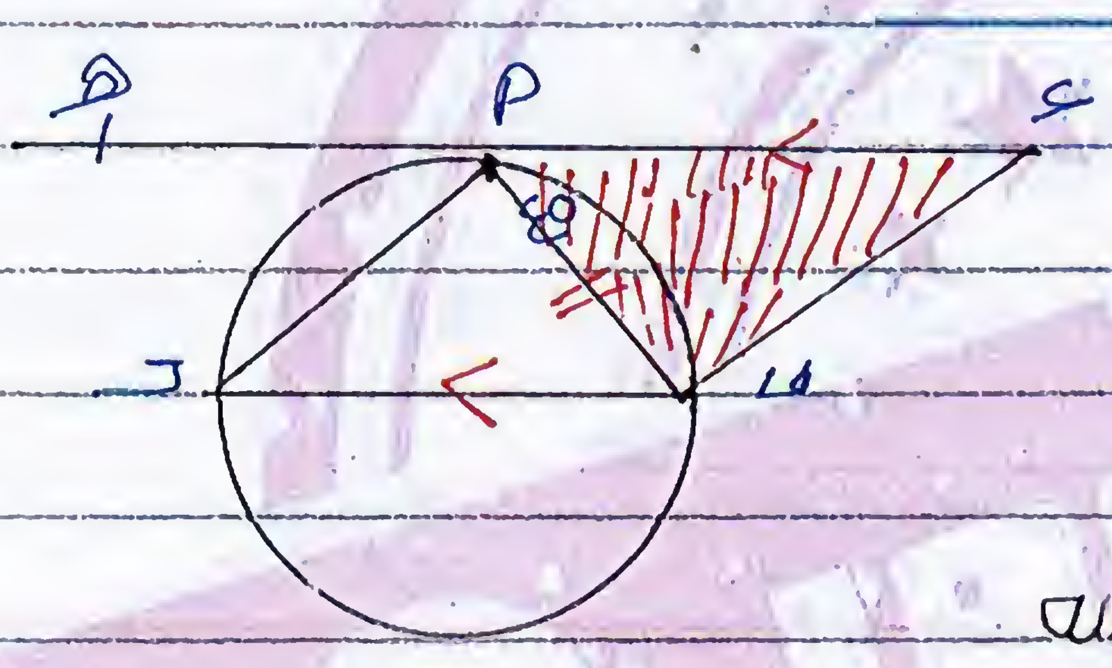
∴ ق(∠أبد) = ق(∠أدب) = ٤٠° .... ①

∵ ق(∠أجب) = ق(∠أدب) = ٤٠° .... ② محيطيتان تحصران أب (أولاً)

∴ ق(∠هـبأ) = ق(∠هـجب) = ٤٠°

∴ أب مماسة للدائرة المارة بالنقط ب ، هـ ، ج (ثانياً)

في الشكل المقابل



دأ مماس للدائرة عند أ

ق(∠بأد) = ٤٥° ، دأ ∥ بج

أوجد ق(∠هـأج)

وإذا كانت أب = بد أثبت أن بج قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس △ أبد

الحل

∵ دأ ∥ بج ∴ ق(∠أبج) = ق(∠بأد) = ٤٥° بالتبادل

∵ أهـ مماس للدائرة عند أ

∴ ق(∠هـأج) = ق(∠أبج) = ٤٥° مماسية ومحيطية تحصران أج (أولاً)

في △ أبد ∵ أب = بد

∴ ق(∠بأد) = ق(∠أدب) = ٤٥°

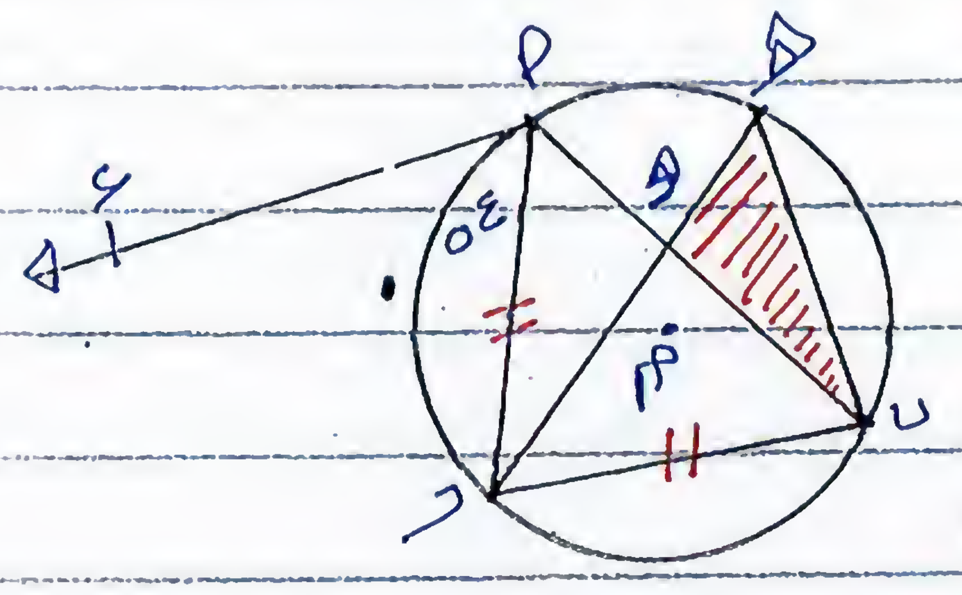
∴ ق(∠أبج) = ق(∠د) = ٤٥°

∴ بج قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس △ أبد

عكس نظرية (٥)

٦١

في الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، أ جـ = ب جـ

أ د مماس للدائرة ، ق(∠جـ أ د) = ٤٠°

① أوجد ق(∠أ م جـ) ، ق(∠ب هـ جـ)

② اثبت أن ب جـ تمس الدائرة المارة برؤوس △ ب هـ و

الحل

∵ أ د مماس للدائرة م

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠د أ جـ) = ٤٠° محيطية ومماسية تحصران أ جـ (أولاً)

في △ أ ب جـ

∵ أ جـ = ب جـ

∴ ق(∠جـ أ ب) = ق(∠أ ب جـ) = ٤٠°

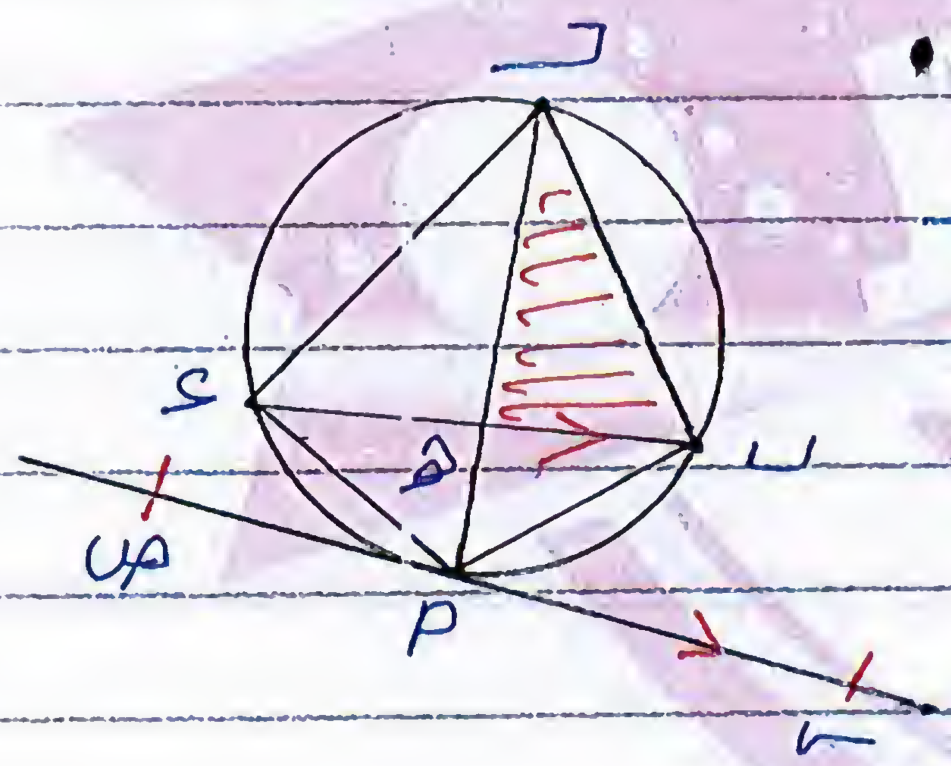
∴ ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠ب أ جـ) = ٤٠° محيطتان تحصران ب جـ (ثانياً)

∵ ق(∠جـ ب و) = ق(∠ب هـ و) = ٤٠°

∴ ب جـ تمس الدائرة المار برؤوس △ ب هـ و

—— // —— // ——

في الشكل المقابل:



أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تتقاطع قطراه في هـ

فإذا كانت س ص مماساً للدائرة عند أ

فإذا كانت س ص مماساً للدائرة عند أ ، س ص // ب د

اثبت أن ① جـ أ تنصف ∠ ب جـ د

② ص أ يمس الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، هـ

الحل: ∵ س ص مماس للدائرة عند أ ، س ص // ب د

∴ ق(ب أ) = ق(أ د)

∴ ق(∠ب جـ أ) = ق(∠د جـ أ) نتيجة على نظرية (٢) ①

∴ جـ أ ينصف ∠ ب جـ د (أولاً)

∵ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ جـ د) محيطتان تحصران أ د ②

من ① ، ②

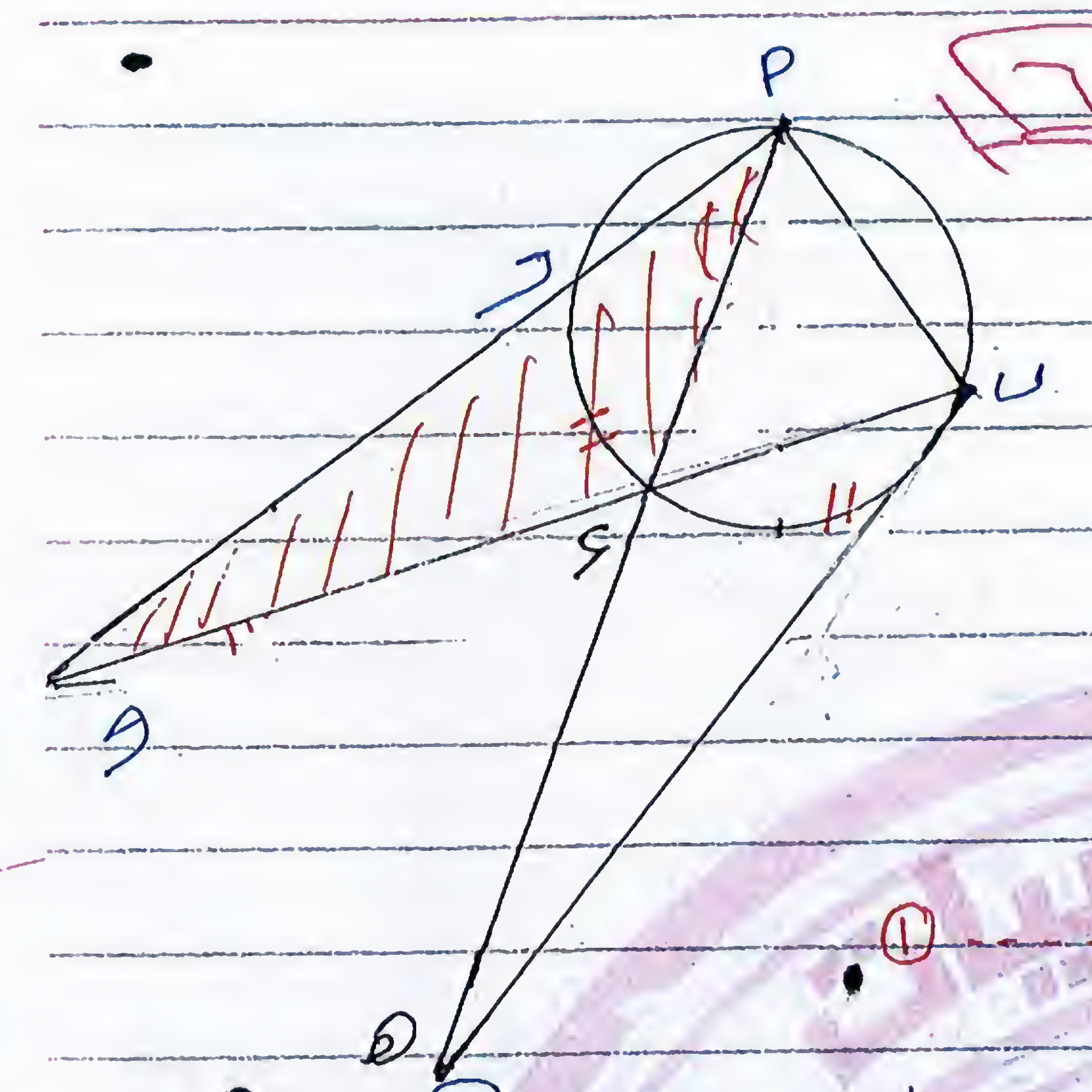
∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠ب جـ هـ)

∴ ص أ يمس الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، هـ

عكس نظرية (٥)

٦٢

في الشكل المقابل



أب ، أجـ وتران في دائرة ، د منتصف $\overset{\frown}{بجـ}$

رسم $\overleftrightarrow{بهـ}$ مماس للدائرة عند ب فقطع $\overrightarrow{أد}$ في هـ

رسم $\overrightarrow{بد}$ فقطع $\overline{أجـ}$ في و

اثبت أن ① الشكل أ ب هـ و رباعي دائري

② $\overleftrightarrow{وهـ}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ د و

الحل

∵ د منتصف $\overset{\frown}{بجـ}$ ∴ ق($\overset{\frown}{بد}$) = ق($\overset{\frown}{دجـ}$)

∴ ق(∠ب أ د) = ق(∠جـ أ د) ①

∵ $\overline{بهـ}$ مماس للدائرة عند ب

∴ ق(∠هـ ب د) = ق(∠د أ ب) ② مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{بد}$

من ① ② ∴ ق(∠هـ ب د) = ق(∠هـ أ و)

وهما مرسومتان على $\overline{هـو}$ وفي جهة واحدة منها

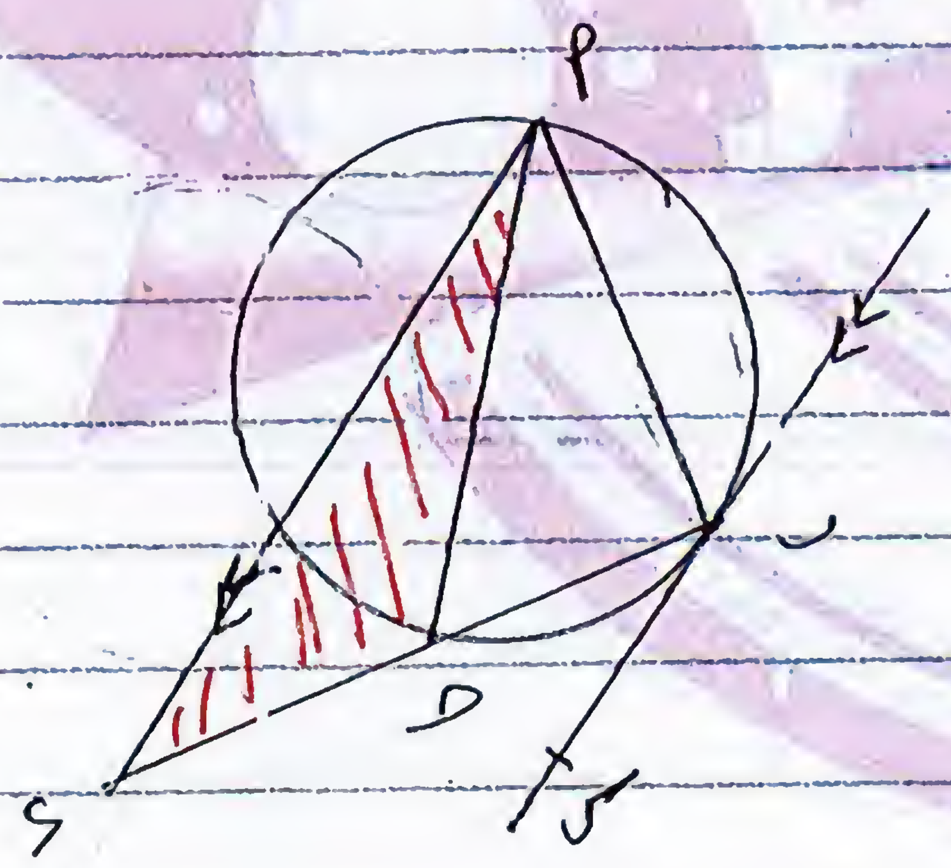
∴ الشكل أ ب هـ و رباعي دائري

∴ ق(∠هـ و ب) = ق(∠هـ أ ب) ③ مرسومتان على $\overline{هـب}$

من ①، ③ ∴ ق(∠هـ و د) = ق(∠د أ و)

∴ $\overleftrightarrow{وهـ}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ د و

في الشكل المقابل



أ ب جـ مثلث داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{بس}$ مماس للدائرة عند ب

$\overleftrightarrow{أد}$ // $\overleftrightarrow{بس}$ اثبت أن :

$\overline{أب}$ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ جـ د

الحل

∵ $\overleftrightarrow{بس}$ مماس للدائرة عند ب

∴ ق(∠س ب جـ) = ق(∠ب أ جـ) مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{بجـ}$

∵ $\overleftrightarrow{بس}$ // أد

∴ ق(∠س ب جـ) = ق(∠د) ② بالتبادل

من ①، ② ∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠د)

∴ $\overline{أب}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس △ أ جـ د

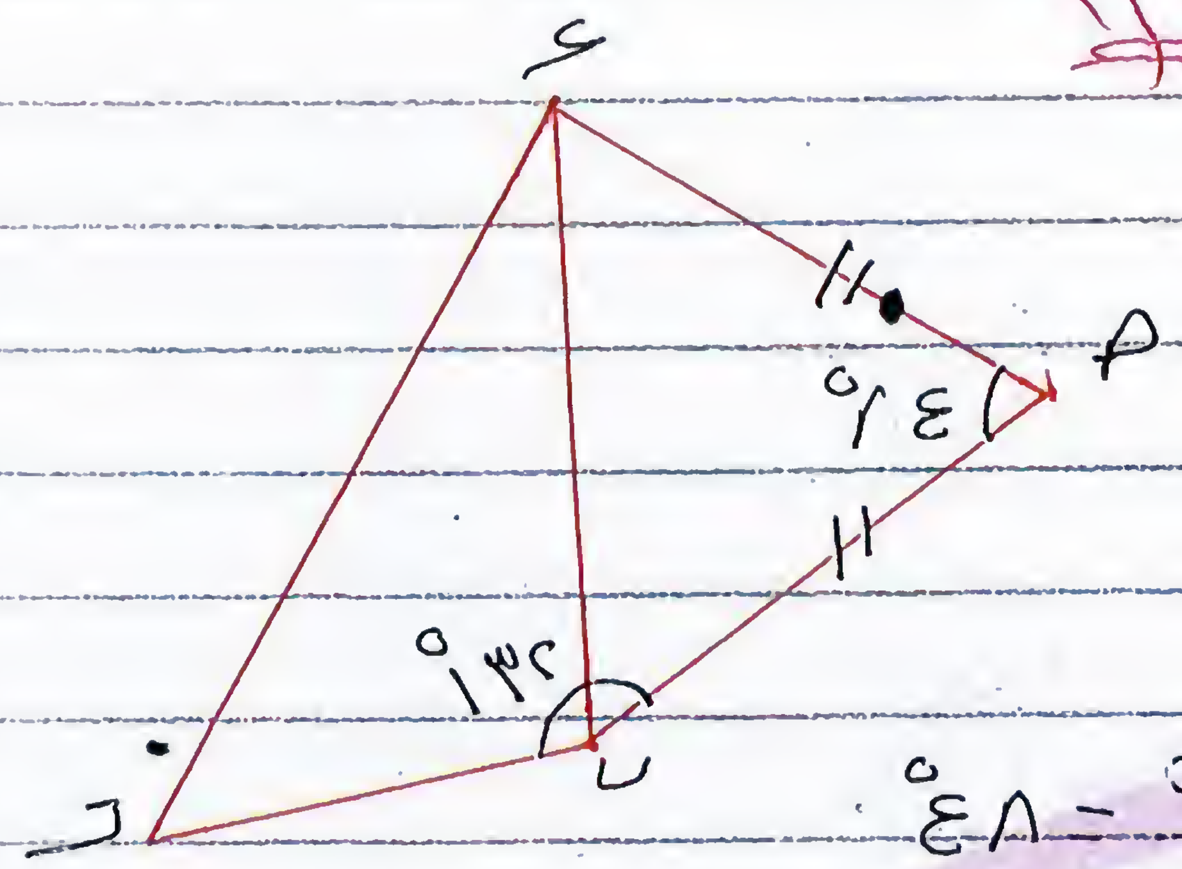
عكس نظرية (٥)

في الشكل المقابل:

أ ب جـ د رباعي فيه أ ب = أ د

ق(∠أ) = ٨٤° ، ق(∠أ ب جـ) = ١٣٢°

أثبت أن: ب جـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ، ب، د



الحل: في Δ أ ب د ∵ أ ب = أ د

∴ ق(أ ب̂ د) = ق(أ د̂ ب) = $\frac{١٨٠ - ٨٤}{٢} = \frac{٩٦}{٢}$ = ٤٨°

∴ ق(جـ ب̂ د) = ١٣٢ − ٤٨ = ٨٤°

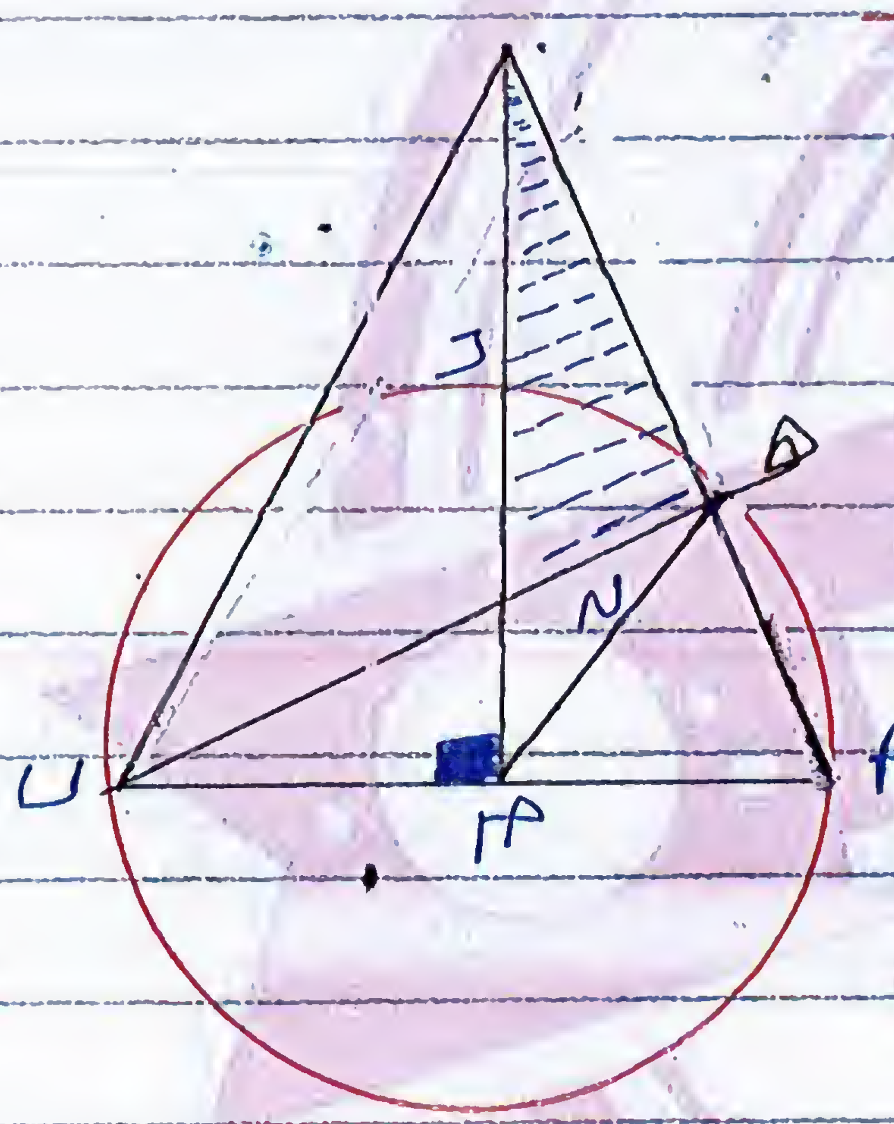
∵ ق(جـ ب̂ د) = ق(أ د̂ ب) = ٨٤°

∴ ب جـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ، ب، د

أ ب قطر في دائرة مركزها م ، م جـ نصف قطر فيها عمودي على أ ب

أثبت أن: ① الشكل د هـ م ب رباعي دائري

② هـ م مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ن د هـ



الحل

∵ أ ب قطر في الدائرة م

∴ ق(أ هـ̂ ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∴ ق(د هـ̂ ب) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°

∵ ق(د هـ̂ ب) = ق(د م̂ ب) = ٩٠°

وهما مرسومتان على أ ب وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل د هـ م ب رباعي دائري (أولاً)

∴ ق(هـ د̂ م) = ق(هـ ب̂ م) مرسومتان على هـ م ①

في Δ م ب هـ

∵ م ب = م هـ = نق

∴ ق(م هـ̂ ب) = ق(م ب̂ هـ) ②

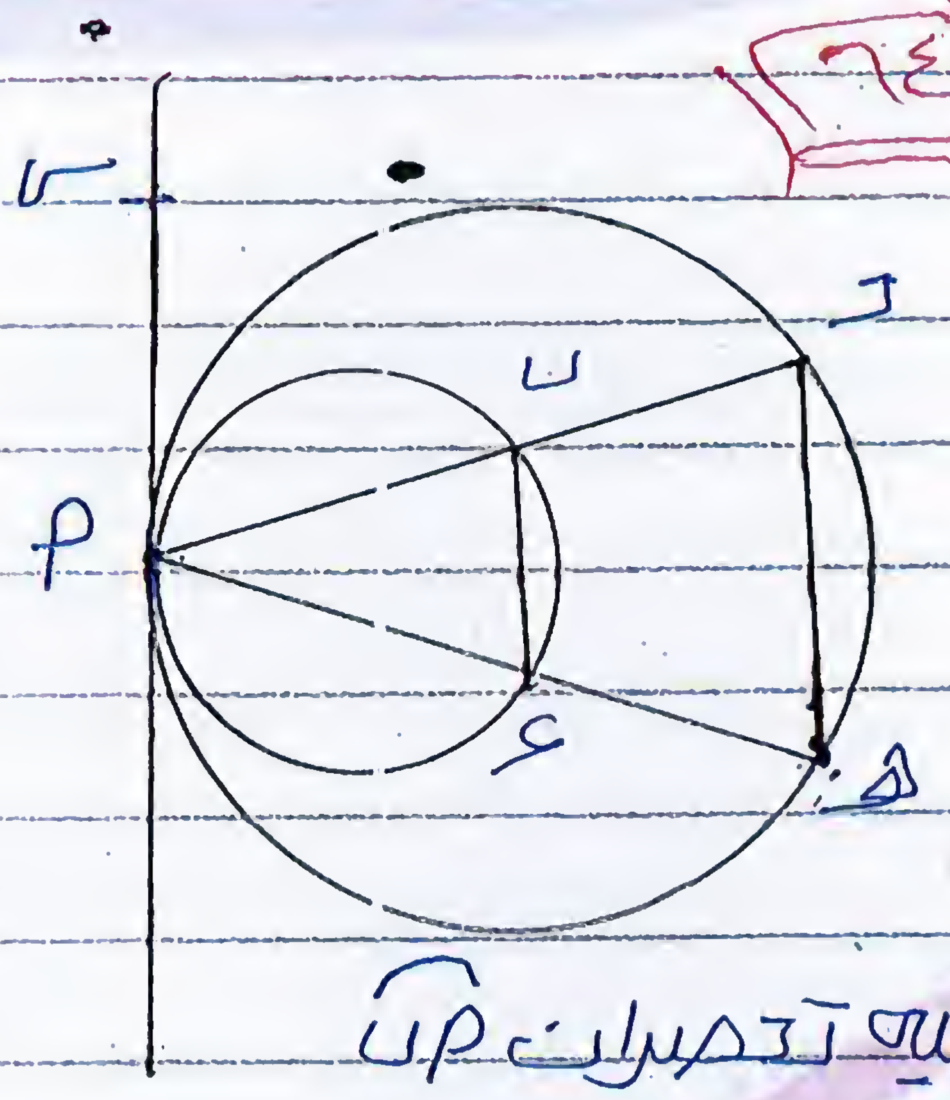
من ① و ② ∴ ق(م هـ̂ ب) = ق(هـ د̂ ن)

∴ هـ م مماس للدائرة المارة برؤوس Δ ن د هـ

٦٤

* الزاوية المماسية *

دائرتان متماستان من الداخل في أ ، $\overleftrightarrow{أس}$ مماس مشترك لهما عند أ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أب}$ يقطعان الدائره في ء ، ب ويقطعان الكبرى في هـ ، جـ



اثبت أن : $\overline{ءب}$ // $\overline{هـجـ}$

الحل

في الدائره الصغرى

∵ $\overrightarrow{أس}$ مماس لها عند أ

∴ ق(∠ س أ ب) = ق(∠ أ ء ب) ... ① مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{أب}$

في الدائره الكبرى

∵ $\overrightarrow{أس}$ مماس لها عند أ

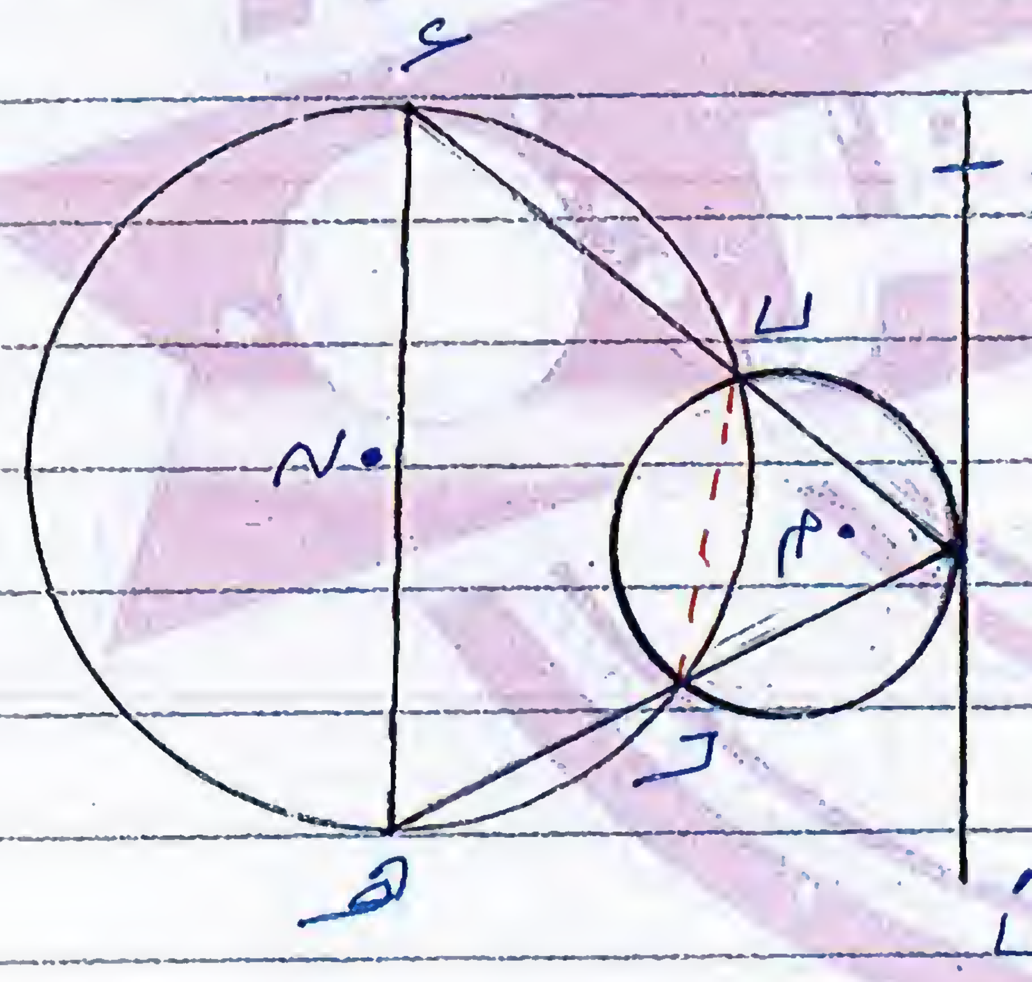
∴ ق(∠ س أ جـ) = ق(∠ أ هـ جـ) ... ② مماسية ومحيطية تحصران $\overset{\frown}{أجـ}$

من ① ②

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ هـ جـ) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{ءب}$ // $\overline{هـجـ}$

دائرتان متقاطعتان في ب ، جـ ، $\overleftrightarrow{أو}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ يقطعان الدائره الأخرى في ع ، هـ



اثبت أن $\overleftrightarrow{أو}$ // $\overline{ءهـ}$

العمل : نرسم $\overline{بجـ}$

البرهان : $\overleftrightarrow{أو}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ ق(∠ و أ ب) = ق(∠ أ جـ ب) ... ①

محيطية ومماسية تحصران $\overset{\frown}{أب}$

∵ الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ ء) ... ② خارجة عن رباعي الدائري

من ① ، ②

∴ ق(∠ و أ ب) = ق(∠ ء) وهما في وضع تبادل

∴ $\overleftrightarrow{أو}$ // $\overline{ءهـ}$

سلسلة

كنزي

أحمد عمر

kanzi-eg.blogspot.com

Ahmedomar3782

تصميم

Mohamed Abdelnaby

01096085502